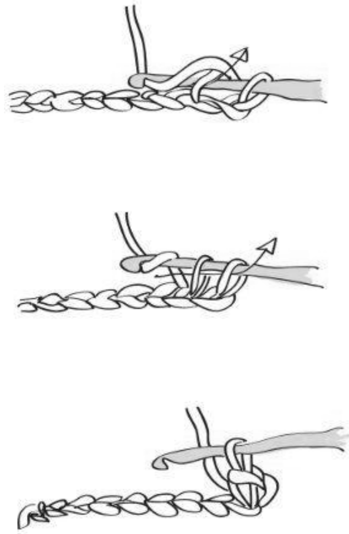
(a)
(b)
(c)
Rys. 2 Półsłupek

ani alergicznie, warto wziąć ten numer *Delty* i pouczyć się razem. W końcu matematyka lepiej smakuje w grupie.

Algorytm. Te kilka rzędów, które opisaliśmy jako próbkę do nauki ściegów, nie tworzy jeszcze płaszczyzny hiperbolicznej. Uważny Czytelnik dostrzeże, że przy starannym przerabianiu każdego oczka i pamiętaniu o dodaniu jednego na końcu rzędu tworzy nam się zwykły, euklidesowy prostokąt. Dlatego teraz, po przerobieniu bazowego łańcuszka, zwiększajmy liczbę półsłupków co n. Przyjmijmy, że nasze n będzie równe 5. Zacznijmy od małego łańcuszka, np. 20 oczek (+oczko na potrzeby przejścia do nowego rzędu). Zróbmy standardowe 4 półsłupki, wbijając się w kolejne oczka. Piąty półsłupek zróbmy, wbijając się w tę samą pętelkę, co czwarty. Powtarzajmy te dwa kroki do końca rzędu. Oznacza to, że co piąty półsłupek będzie robiony „do tyłu” robótki. Na koniec rzędu dodajmy jedno oczko i odwróćmy robótkę. W początkowym łańcuszku mieliśmy 20 oczek, po pierwszym rzędzie jest ich już 26. Procedurę powtarzamy w kolejnych rzędach. Gdy znudzi nam się robótka, możemy obciąć nitkę, przeciągnąć ją przez leżącą na szydełku pętelkę i zacisnąć, żeby zakończyć.

Czemu to działa? W każdym rzędzie dodajemy coraz więcej oczek – zasada jest zbliżona do opisanej wcześniej konstrukcji papierowej. Bierzemy konstrukcję płaszczyzny euklidesowej i dodajemy element (tam – bok czarnej figury, tu – półsłupek) tak, by twór nie mieścił się na płaszczyźnie i musiał się zakrzywić; element ten dodajemy w regularny sposób, dzięki czemu otrzymujemy powierzchnię o stałej krzywiźnie. Stosunek liczby oczek pomiędzy rzędami pozostaje zawsze ten sam: n do $n+1$. Po kilku(nastu) rzędach, w zależności od wybranego n, nasza robótka przestaje się wygodnie mieścić w trójwymiarowym, euklidesowym świecie. Dodawanie oczek to również powód, dla którego szydełko jest wygodniejsze od drutów. Przy korzystaniu z drutów, robótka musi zawsze na jednym z nich się opierać, co stanowi problem przy wykładniczym zwiększaniu się liczby oczek.

Czy można rozprostować jeden rząd naszej konstrukcji? Łatwo sprawdzić, że nie można, i nic dziwnego – z punktu widzenia geometrii hiperbolicznej rzędy nie są prostymi (są raczej przybliżeniami hiperbolicznego kształtu zwanego *horocyklem*). By znaleźć prostą, chwytamy nasz model w dwóch miejscach i rozciągamy, znajdując w ten sposób najkrótszą drogę między nimi. Po skonstruowaniu dużego trójkąta z trzech prostych możemy zaobserwować, że jego suma kątów jest mniejsza niż 180 stopni.

Co dalej? Teraz na różnych próbkach (żeby zachować stałą krzywiznę!) możemy wypróbować, jak zachowuje się płaszczyzna, gdy zwiększamy lub zmniejszamy n. Ciekawym rozszerzeniem jest również zrobienie pseudosfery: w tym celu po zrobieniu początkowego łańcuszka, wkłujmy się w najdalej leżące oczko (pierwsze, które zrobiliśmy) i po narzuceniu nitki, przeciągamy ją przez obie pętelki leżące na szydełku – stworzymy kółeczko. Jedno oczko łańcuszka na odwrócenie robótki i teraz spiralnie kontynuujemy algorytm, pamiętając, by co n-ty półsłupek robić „do tyłu” robótki.

Problem 153. z Księgi Szkockiej

*Wiesław ŻELAZKO**

*Instytut Matematyczny, Polska Akademia Nauk

Tytułowy problem, postawiony przez Stanisława Mazura 6 listopada 1936 roku, brzmi:

Czy dla każdej funkcji ciągłej $f(x,y)$ określonej w kwadracie $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ i dowolnej liczby dodatniej ε istnieją takie punkty kwadratu $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ oraz liczby $c_1, \ldots, c_n$, że dla wszystkich punktów (x,y) tego kwadratu

$$\left| f(x,y) - \sum_{i=1}^{n} c_i f(x, y_i) f(x_i, y) \right| < \varepsilon.$$

Problem nie wygląda szczególnie interesująco, ale Mazur wiedział, że ma on związek z ważnym wówczas pytaniem: *czy każda ośrodkowa przestrzeń Banacha ma bazę Schaudera*. Baza Schaudera $(x_i)_1^\infty$ przestrzeni Banacha X to taki ciąg jej punktów, że dowolny element x tej przestrzeni daje się przedstawić w postaci $x = \sum_1^\infty f_i(x) x_i$, przy czym współczynniki $f_i(x)$ są funkcjonałami ciągłymi. Okazało się później (udowodnił to wielki matematyk francuski Alexander Grothendieck), że problem Mazura jest równoważny z problemem aproksymacji dla przestrzeni Banacha X: *czy każdy liniowy operator zwarty* *z dowolnej przestrzeni Banacha do X daje się aproksymować w normie przez operatory skończenie wymiarowe?* Jest tak, jeśli przestrzeń X ma bazę Schaudera. Za rozwiązanie tego problemu Stanisław Mazur obiecał ufundować nagrodę w postaci żywej gęsi. Rozwiązał go po wielu latach Per Enflo w pracy opublikowanej w roku 1973. Odpowiedź była negatywna: Enflo skonstruował przestrzeń bez własności aproksymacji, a tym samym bez bazy Schaudera. Wynik ten wywołał sensację; gdy było już pewne, że jest poprawny, Enflo został zaproszony do Warszawy po odbiór nagrody.

Zdjęcie można znaleźć w książce Kazimierza Kuratowskiego „Pół wieku matematyki polskiej 1920–1970" wydanej przez Książkę i Wiedzę w 1973 roku

Prezydent Uniwersytetu Kalifornijskiego w Berkeley, gdzie Enflo wówczas pracował, ofiarował mu bilet na przelot. Ponieważ wydarzenie miało miejsce w grudniu 1972 roku, na kilka dni przed Bożym Narodzeniem, szczęśliwy matematyk przy okazji mógł odwiedzić rodzinę w Szwecji. Sławetną gęś zakupiła i umieściła w koszyku dr Anna Warzecha. Enflo otrzymał ją w prywatnym mieszkaniu Mazura (nie byłem przy tym obecny). Słynne zdjęcie Mazura, Enflo i gęsi zrobił wtedy Wiesław Szlenk. Tego dnia gość wygłosił wykład podczas zebrania Towarzystwa Matematycznego w Pałacu Kultury i Nauki (Mazur nie był obecny na tym wykładzie). Reporter TVP (niejaki „Wicherek") nagrywał tylko początek sesji, więc gdy gęś była już w piecu, można ją było zobaczyć żywą w wieczornych wiadomościach telewizyjnych.

Po wykładzie powstał naturalny problem, co zrobić z gęsią. Enflo następnego dnia miał lecieć do Sztokholmu i nie mógł zabrać jej w żadnej postaci. Problem rozwiązała moja żona Hania. Obiecała upiec gęś pod warunkiem, że ktoś ją zabije i oskubie. Egzekucji dokonał Przemek Wojtaszczyk, obecnie profesor, a wtedy doktorant Aleksandra Pełczyńskiego, który polecił mu to uczynić. Z podobnych powodów gęś została oskubana i oczyszczona przez moją doktorantkę Ewę Ligocką (obecnie emerytowaną profesor UW i laureatkę nagrody Bergmana w USA). Pióra latały po całym domu. Upieczona gęś została podana około trzeciej nad ranem. Przedtem goście dostali coś do jedzenia i picia, a Enflo przez cały czas grał na pianinie. Był i jest doskonałym pianistą, między innymi zagrał sonatę E-dur Beethovena (opus 109). Powiedział mi kiedyś, że dwukrotnie brał udział w międzynarodowych konkursach pianistycznych, i że pewnego razu zaproszono go na konferencję matematyczną, ale nie po to, aby coś powiedział, ale po to, aby zagrał. Było mu co prawda smutno, ale się zgodził. Pamiętam, że kiedyś podczas wizyty w Kent (Ohio, USA) byłem wraz z żoną zaproszony do Państwa Enflo na kolację. Na początku był koncert: pani Enflo zaśpiewała arię z 208. kantaty Bacha (była śpiewaczką w operze w Cleveland), a Per jej akompaniował. Potem słuchaliśmy Chopina, a w tym czasie pani Enflo szykowała kolację. Kilka dni później byliśmy na publicznym koncercie, na którym oboje wykonywali pieśni Schuberta. Słyszałem, że Per nadal koncertuje, czasami nawet z orkiestrą.

Per Enflo gościł w Krakowie na początku września 2019 roku, podczas Jubileuszowego Zjazdu Matematyków Polskich z okazji 100-lecia powstania Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Uczestnicy Zjazdu mieli możliwość wysłuchania koncertu fortepianowego Pera Enflo 6 września w Kinie Kijów.

Per Enflo miał także swój udział w rozwiązaniu innego słynnego, i chyba ważniejszego, problemu, mianowicie problemu podprzestrzeni niezmienniczej. Było to pytanie, *czy każdy operator liniowy ciągły $\mathcal{T}$ przestrzeni Banacha X w siebie ma właściwą podprzestrzeń niezmienniczą,* to znaczy taką podprzestrzeń domkniętą Y przestrzeni X, że $\mathcal{T}(Y) \subset Y$. Per pokazał mi kiedyś gruby całkowicie zapisany brulion z konstrukcją kontrprzykładu. Zapamiętałem tylko, że na którejś stronie był sformułowany lemat 68. (numer zmyślony) z uwagą, że dowód jest podobny do dowodu lematu 36. Praca była oddana do druku, ale nikt nie był w stanie tego przeczytać. Słyszałem, że została opublikowana dopiero wtedy, gdy na ten sam temat ukazała się praca Charlesa Reada ze znacznie prostszą konstrukcją, mieszczącą się na kilkunastu stronach. Swoją drogą Charles Read był także niezłym pianistą. Zagrał u mnie w domu sonatę h-moll Liszta na tym samym pianinie, na którym grał Enflo. Pianino jest więc mocno związane z problemem podprzestrzeni niezmienniczej. Piszę dużo o muzyce ze względu na pewną klasyfikację matematyków: na takich, którzy chodzą po górach, grają w szachy lub słuchają muzyki. Istnieją co prawda wybitni matematycy nie podlegający tej klasyfikacji, ale jest ich stosunkowo niewielu.