Twierdzenie o atraktorze. *Po upływie dostatecznie dużego czasu $t > 0$ pole prędkości $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ daje się wyznaczyć z dowolnie małym błędem na podstawie pomiaru w skończonej liczbie punktów.*

Aby nieco lepiej zrozumieć to stwierdzenie, rozważmy prostszą, ale podobną sytuację. Niech f_n będzie ciągiem funkcji gładkich na odcinku $[0, 1]$. Jeśli wiemy, że trzecia pochodna funkcji f_n dąży (jednostajnie) do zera, to wykres f_n musi upodabniać się do paraboli (co wynika ze wzoru Taylora). Funkcje f_n są zatem dla dużych n świetnie przybliżane przez funkcje liniowe lub kwadratowe, te zaś wyznaczane są przez ich wartości w trzech różnych punktach.

W przypadku dwuwymiarowego równania Naviera–Stokesa sytuacja jest w pewnym sensie podobna. Istnieje bowiem zbiór $\mathcal{A}$ zwany atraktorem, którego elementami są pola prędkości, które dają się jednoznacznie wyznaczyć przez ich wartości w N różnych punktach. Wysłowione wyżej twierdzenie mówi jednak, że z upływem czasu pola prędkości dowolnego przepływu (z ustaloną regularną siłą zewnętrzną) w każdej chwili wyglądają niezwykle podobnie do któregoś elementu zbioru $\mathcal{A}$.

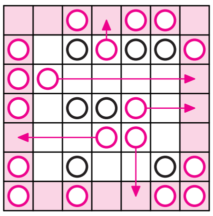
Trzy wymiary

Rozpatrywać będziemy tylko sytuację, gdy nie ma sił zewnętrznych. Jeśli pole wektorowe ma trzy składowe $u = (u_1, u_2, u_3)$ (tzn. przepływ ma miejsce w trójwymiarowej przestrzeni), to wiadomo tylko, że przyszłe pola prędkości przewidywane są jednoznacznie, gdy w chwili początkowej prędkość nie zmienia się zbyt gwałtownie lub ma pewne symetrie. Co jednak dzieje się w przypadku, gdy żadnych symetrii nie ma, początkowe pole prędkości pełne jest gwałtownych wirów, a my mamy numerycznie obliczać przyszłe pola prędkości? W tej sytuacji czysta teoria nic nam (przynajmniej na razie) nie pomoże, mogłoby się więc wydawać, że po uzyskaniu wyniku pozostaniemy niepewni, czy nasze obliczenia są prawidłowe, tzn. czy przyszłe przepływy dają się wyznaczyć na tylko jeden uzyskany przez nas sposób, czy też można dojść do zupełnie odmiennych wyników, stosując np. nieco inną metodę numeryczną. Zupełnie zdumiewający wynik (Chernyshenko, Constantin, Robinson, Titi, 2006) mówi jednak, że nawet, gdy zawodzi nas teoria, to same obliczenia numeryczne mogą nam dać pewność, że są jednoznaczne i prawidłowe! Nie sposób wdawać się tu w szczegóły, ale przedstawmy pokrótce ogólną ideę tego rezultatu. Otóż jeśli w obliczeniach numerycznych przybliżymy początkowy przepływ i siły działające na płyn z błędem wystarczająco małym, a jednocześnie otrzymane rozwiązanie numeryczne będzie miało wystarczająco niski poziom oscylacji (co to znaczy w tym kontekście *poziom oscylacji*, trzeba oczywiście, odpowiednio zdefiniować – to są właśnie techniczne szczegóły), to możemy być pewni, że nasze obliczenia są poprawne.

Sytuacja ta jest w pewnym sensie paradoksalna. Z jednej strony obecna teoria trójwymiarowego równania Naviera–Stokesa jest zbyt słaba, by zapewnić nas o poprawności obliczeń numerycznych przeprowadzanych dla dowolnych (ale sensownych) początkowych pól prędkości. Z drugiej strony dla wszystkich danych początkowych, dla których podstawowy model hydrodynamiki zachowuje się poprawnie, możemy udowodnić poprawność obliczeń na podstawie nich samych, o ile tylko są one wystarczająco dokładne.

Opisany wyżej wynik stanowi dość zaskakujący kontekst do pytania postawionego na wstępie i do wzajemnej zależności pomiędzy dowodami a obliczeniami. Otóż o trójwymiarowym równaniu Naviera–Stokesa *można udowodnić*, że w każdej sytuacji, w której produkuje ono jednoznaczny wynik, *można wykonać przybliżone obliczenia* tak dokładnie, że jednoznaczność przybliżanego rozwiązania będziemy mogli *ściśle udowodnić*, wykorzystując w tym celu własności właśnie *obliczonych* rozwiązań...

Rozwiązanie zadania M 1517.
Każde z 24 pól przyległych do krawędzi szachownicy nazwijmy *brzegowym.* Zauważmy, że każdej wieży, która nie jest otoczona, możemy przyporządkować pewne pole brzegowe w następujący sposób. Jeżeli wieża stoi na polu brzegowym, to przyporządkowujemy jej to pole, na którym stoi; jeżeli zaś nie stoi na polu brzegowym, to przyporządkowujemy jej jedno z tych pól brzegowych, które są w jej zasięgu (skoro wieża nie jest otoczona, to takie pole jest co najmniej jedno).

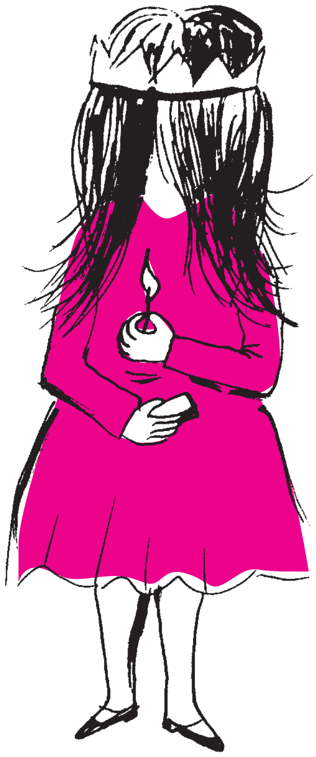


Pozostaje zauważyć, że żadne pole brzegowe nie mogło zostać przyporządkowane więcej niż jednej wieży, a zatem wież, które nie są otoczone, jest co najwyżej 24. Wobec tego pośród dowolnych co najmniej 25 wież stojących na szachownicy jest co najmniej jedna wieża otoczona.

Kilka słów o flogistonie, czyli o tym, jak błędna teoria przyniosła nauce wiele pożytku

Mikołaj JĘDRUSIAK

Dawni uczeni prezentowali rozmaite poglądy, od przesiąkniętych myśleniem magicznym (które często służyło zamaskowaniu niedostatków wiedzy) do zupełnie racjonalnych. Cechą wspólną ogółu badaczy przyrody było – i nadal jest – kierowanie się rozumem. Samo racjonalne wnioskowanie na podstawie przeprowadzonych eksperymentów nie gwarantuje jednak skonstruowania poprawnej teorii wyjaśniającej istotę obserwowanych zjawisk. Jednym z klasycznych przykładów takiego błędnie skonstruowanego formalizmu jest pochodząca z XVII wieku teoria flogistonu. Zdominowała ona umysły naukowców na następne sto lat.



A wieki XVII i XVIII były ciekawym okresem przejściowym w historii nauki. Myśl oświeceniowa nakazywała sceptycznie podchodzić do wcześniejszych, alchemicznych lub pochodzących wprost od Arystotelesa poglądów na przyrodoznawstwo. Jednocześnie nauki takie jak fizyka czy chemia w formie zbliżonej do współczesnej ukształtowały się dopiero pod koniec wieku XVIII. W miejsce dawnych poglądów starano się więc wbudować nowe teorie, już prawie współczesne, ale jeszcze nie całkiem. A wszystko to np. bez dostępu do wystarczająco dokładnych technik pomiarowych.

Skoncentrujemy się na znanej ludzkości od niepamiętnych czasów reakcji chemicznej, jaką jest spalanie. Spalić można wiele rzeczy – drewno wystarczy wrzucić do ogniska. Sztabkę żelaza można wyżarzyć w piecu. Niektórych obiektów spalić nie sposób, jak np. kamień czy złoto. Czemu tak się dzieje?

Uczeni wiedzieli, że spalanie jest „reakcją", to znaczy, że dochodzi do istotnej zmiany właściwości spalanego obiektu. Wszak widać, że popiół to zupełnie coś innego niż kawałek drewna oraz, co ważniejsze, że oba te obiekty wykazują zupełnie różną aktywność w reakcjach chemicznych. Tradycyjna teoria, pochodząca od Arystotelesa, mówiła, że wszelkie obiekty składają się z czterech (lub innej liczby) żywiołów. Reakcje polegają zaś albo na wymianie żywiołów między reagującymi indywiduami, albo na zmianie sposobu rozmieszczenia żywiołów w obrębie danego obiektu. Obecnie mówimy o około 120 żywiołach, zwanych pierwiastkami. Ogólna idea jest jednak bardzo podobna.

Pozostając pod wpływem tego poglądu, jednak odrzucając wiele z jego metafizycznych aspektów, w roku 1697 r. Georg E. Stahl przedstawił spójną teorię wyjaśniającą, między innymi, mechanizm reakcji spalania. Zaproponował on istnienie flogistonu, swego rodzaju fluidu lub gazu, przepełniającego rozmaite ciała, odpowiedzialnego za procesy palenia i wymiany ciepła. Był to obiekt podobny do tradycyjnego żywiołu ognia, z tą różnicą, że utożsamiany nie tyle z żółtym, gorącym płomieniem, co swego rodzaju budulcem materii, którego ów płomień jest emanacją. Stahl sądził bowiem, że ogień i ciepło, jako obiekty wtórne, powstają na skutek przepływu flogistonu między ciałami. I na tym pomyśle zbudował całą teorię.

Rozumował w sposób następujący. Skoro spalanie polega na przepływie flogistonu między paliwem a otoczeniem, to należy ustalić kierunek tego przepływu. Ponieważ palone obiekty na ogół zamieniają się w popiół lub proch, a więc na drodze reakcji wytracają swoją uporządkowaną strukturę, rozdrabniają się, to można pomyśleć, że flogiston przy tym ulatuje. Podobnie jak ciecz wylewająca się z rozbitego naczynia. Zatem flogiston przepływa od paliwa do powietrza. Stąd dalszy wniosek, że obiekty łatwopalne zawierają go dużo, niepalne zaś mało lub wcale.

W prosty sposób Stahl wyjaśnił w zasadzie wszystkie znane ówcześnie odwracalne procesy utleniania i redukcji. Skoro bowiem sztabka metalu zawiera w sobie nieco flogistonu, a metal ten można w wysokiej temperaturze spalić (czemu towarzyszy uwolnienie flogistonu do otoczenia), to można

*Wydział Chemii, Uniwersytet Warszawski