Moja przygoda z najnowszą historią matematyki

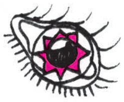
*Paweł STRZELECKI**

Wybitny rosyjski geometra Michaił Gromow powiedział kiedyś w dokumentalnym programie telewizyjnym poświęconym Perelmanowi, że próba opowiadania zwykłemu odbiorcy o mocno zaawansowanej matematyce jest jak wspólna analiza chińskiego tekstu z kimś, kto chińskiego nie zna; po prostu nie należy tego robić. Skorzystam tym razem z tej rady (o Perelmanie i historii jego dokonań pisałem w *Delcie* 1/2004, a także w ostatnim rozdziale *Matematyki współczesnej dla myślących laików* i od merytorycznej strony nie mam nic istotnego do dodania). Z Czytelnikiem podzielę się kilkoma wrażeniami, które – za sprawą historii Perelmana i jego dowodu otwartej od 1904 roku hipotezy Poincarégo oraz późniejszej o 80 lat hipotezy geometryzacyjnej Thurstona, dowodu uznanego przez *Science* za naukowy przełom roku 2006 – są ze mną od lat i chyba mocniej kształtują moje poglądy niż czysto matematyczna treść tej historii.

O Thurstonie i hipotezie geometryzacyjnej można przeczytać w *Delcie* 1/2013.

1. W końcu sierpnia 2003 roku, wróciwszy do Bonn, gdzie wtedy przez chwilę był mój dom, z górskich wakacji przerwanych tygodniowym pobytem na konferencji w Oberwolfach, przeczytałem maila od Witka Sadowskiego, ówczesnego redaktora działu matematyki w *Delcie*, z pytaniem, czy nie miałbym pod ręką jakiegoś artykułu. Pomyślałem od razu, że muszę napisać o Perelmanie.

Odczuwałem wtedy bardzo intensywnie, że solidny kawał matematyki zmienia się na moich oczach. Podczas sierpniowego tygodnia w Oberwolfach, mimo koszmarnego upału i napiętego konferencyjnego programu, długo w noc słuchaliśmy dodatkowych wykładów; Gerd Huisken i Klaus Ecker, niemieccy specjaliści z pogranicza geometrii różniczkowej i analizy matematycznej, próbowali zawodowej, ale wcale nie tak wiele rozumiejącej publiczności wytłumaczyć, co (a raczej: jakim sposobem) zrobił właśnie Grigorij Jakowlewicz Perelman. Do dziś to żywo pamiętam. Chyba nigdy w życiu, z żadnej innej okazji nie miałem aż tak silnego wrażenia, że doświadczam czegoś historycznego. Różne odpryski i aspekty tamtej historii towarzyszą mi do dziś.



Wtedy, w 2003 roku, postąpiłem wbrew zaleceniu Gromowa i spróbowałem opowiedzieć także o matematyce. Dzięki *Delcie* i temu, co w jej nieco wcześniejszych numerach Czytelnicy mogli znaleźć, było to możliwe. Przypomnę:

– z tekstu Jarosława Górnickiego z *Delty* 6/1995 Czytelnik *Delty* dowiadywał się, jak wygląda pełna lista zwartych, orientowalnych rozmaitości dwuwymiarowych, tzn. takich powierzchni, które mają dwie strony, ale nie mają ani brzegu, ani żadnych nakłuć czy rozcięć, ani powyciąganych nieskończenie daleko odnóg;

– po informację, co to są rozmaitości trójwymiarowe (możliwe formy naszej przestrzeni, lokalnie, w małych fragmentach, przypominające do złudzenia zwykłą trójwymiarową przestrzeń), mogłem odesłać do artykułu Zbigniewa Marciniaka z *Delty* 5/1997;

– w *Delcie* 8/2000 sam napisałem o siedmiu problemach milenijnych Instytutu Claya, z nagrodami po milionie dolarów od sztuki;

– wreszcie, w *Delcie* 4/2003 (tzn. czystym przypadkiem akurat wtedy, gdy sam Perelman opowiadał o swoim dowodzie na kilku amerykańskich uniwersytetach – proszę jednak pamiętać, że cykl wydawniczy *Delty* jest dość długi) znajduje się artykuł o płynących krzywych i powierzchniach, z opowiastką o tym, co się dzieje, gdy wprawimy je w ruch ze zmienną, zależną od krzywizny prędkością (to akurat łatwo powiedzieć: krzywe zamknięte, choćby najbardziej fantazyjnie poskręcane, poruszając się z prędkością równą krzywiźnie, zaczynają stopniowo przypominać idealne okręgi; powierzchnie dwuwymiarowe wprawione w naturalny ruch podobnego typu mogą doznawać katastrof i rozpadać się na części, bo wąskie i długie rureczki kurczą się dużo szybciej niż kuliste, duże bąble).

2. Perelman ucieleśnia irytujące opinie o romantycznych, zdziwaczałych geniuszach zajmujących się matematyką. Jako szesnastolatek zdobył w 1982 roku złoty medal (i komplet punktów!) na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej. W wieku 24 lat obronił w Leningradzie doktorat. Przed trzydziestką pisał sążniste prace

*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Gdyby kilkanaście lat wcześniej, gdy sam kończyłem studia matematyczne, ktoś powiedział mi, że w przewidywalnej przyszłości owa hipoteza zostanie udowodniona, i to dzięki pomysłowi, żeby wyrównać kształt rozmaitości, poddając ją naturalnemu ruchowi opisanemu równaniami różniczkowymi cząstkowymi przypominającymi równanie ciepła i że w rozwiązaniu będzie więcej geometrii różniczkowej i twardej analizy niż topologii, z której problem pochodzi, uznałbym to za marne *science-fiction*. Życie jest jednak bogatsze niż pomysły marnych autorów oraz przekonania niedowiarków takich jak ja, a w matematyce chodzi o rozwiązywanie problemów i wszelkie metody, wszelkie chwyty, wszelkie wariackie i dalekosiężne pomysły są dozwolone – pod warunkiem, że ma się dość siły, żeby je realizować. Perelman miał.

z najlepszymi, grubo starszymi radzieckimi kolegami po fachu. Lata 1992–95 spędził w USA, w Nowym Jorku, Stony Brook i Berkeley. Tam poznał m.in. Richarda Hamiltona, autora pomysłu z pogranicza marzeń, aby trójwymiarowe rozmaitości wprawiać w ruch z prędkością zależną od tensora krzywizny (tak zwany potok Ricciego) i udowodnić hipotezę Poincarégo dzięki temu, że potok Ricciego lokalnie wygładza kształty i niweluje wszelkie fałdki sprawiające, że rozmaitość – może sfera, może torus, może inne fantazyjne dziwactwo – zaczyna wyglądać bardzo symetrycznie i równomiernie.

Problem w tym, że po drodze takie fantazyjne dziwactwo doznaje osobliwości, wpada samo na siebie, zwęża się i kurczy, więc trzeba o rozwiązaniach równań ruchu myśleć nieszablonowo, zapobiegać pojawianiu się osobliwości, umieć przewidzieć ich nadejście, umieć zrobić coś pozornie niemożliwego: przedłużyć ruch poza osobliwość, która jako taka do gładkiego świata geometrii różniczkowej nie należy. Hamilton nie potrafił tego projektu zrealizować w całości.

W 1995 roku Perelman wrócił do rodzinnego miasta (o zmienionej nazwie) i spędził kolejne 7 lat w Instytucie Stiekłowa, zmagając się z realizacją pomysłu Hamiltona. Między listopadem 2002 a lipcem 2003 roku udostępnił w Internecie trzy preprinty, w których anonsował dowód hipotezy geometryzacyjnej Thurstona. W ostatnim, napisanym już po pobycie z wykładami w Stanach, wskazywał, jak uprościć dowód w przypadku, który dotyczy jedynie hipotezy Poincarégo.

3. Między rokiem 2003 a 2006 kilka silnych zespołów matematyków przebrnęło przez zwięźle zapisane dowody Perelmana, i napisało ich swoje, znacznie dłuższe i bardziej szczegółowe wersje. Dlaczego dłuższe? Czy chodziło o łatanie luk? Otóż, wydaje się, że nie: z lektur i z rozmów z paroma kolegami ze świata, którzy byli blisko tego procesu, wyniosłem wrażenie, które mogę najprościej opisać za pomocą porównania: było tak, jakby sprawdzający wspinali się w górach drogą, skąpo przez zdobywcę opisaną i ponoć raz przebytą; czasem trzeba się namęczyć, napocić, cofnąć, żeby zrozumieć, co znaczy fraza „teraz 40 m trawersem w prawo w górę przez gładkie, nastromione płyty”, potem jednak, gdzieś wyżej, widać stary hak zdobywcy, zostawione przez niego skórki pomarańczy i następny fragment ściany, wcześniej niewidoczny, lecz idealnie do opisu pasujący. Po serii takich zdarzeń nikt nie uważa, że ów opis drogi to produkt fantazji ambitnego grafomana, któremu się tylko wydaje, że jednak gdzieś był. Nie, naprawdę tam był.

John Ball, ówczesny przewodniczący Międzynarodowej Unii Matematycznej, wspominał o miłych, ale bezskutecznych rozmowach z Perelmanem, którego, pojechawszy do St. Petersburga, usiłował nakłonić do przyjęcia medalu i wizyty na kongresie.

W czerwcu 2006 roku dwaj chińscy matematycy, Xi Ping Zhu i Huai Dong Cao, opublikowali w *Asian Journal of Mathematics* ponad dwustustronicową pracę z takim streszczeniem: *Podajemy tu dowód hipotezy Poincarégo i hipotezy geometryzacyjnej. Niniejsza praca korzysta z sumy osiągnięć wielu matematyków, którzy w ostatnich 30 latach zajmowali się analizą geometryczną. Dowód należy uznać za ukoronowanie teorii Hamiltona i Perelmana, opisującej potok Ricciego.* Czyj dowód, niestety nie napisali. A w tekście różni ludzie znaleźli potem, prócz rzetelnej matematyki, także fragmenty, żywo nadające się na poglądowy przykład, co to jest plagiat.

W lipcu 2006 roku Instytut Claya udostępnił (za darmo, można skorzystać i dziś) w Internecie pełny tekst monografii Johna Morgana i Ganga Tiana *Ricci Flow and the Poincaré Conjecture*.

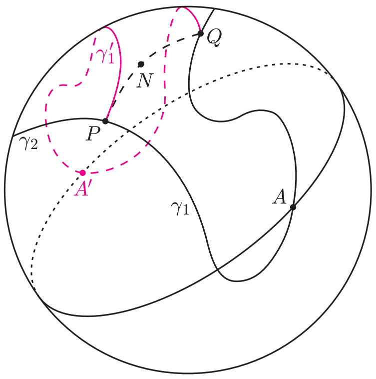
W tymże 2006 roku Perelmanowi przyznano medal Fieldsa. Odmówił jego przyjęcia; 22 sierpnia 2006 król Juan Carlos podczas ceremonii otwarcia Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Madrycie zobaczył, zamiast czwartego z laureatów, puste krzesło w pierwszym rzędzie.

W tym samym czasie ukazał się w tygodniku *The New Yorker* kontrowersyjny artykuł Sylvii Nasar (m.in. autorki słynnej biografii Johna Nasha) oraz Davida Grubera, zatytułowany *Rozmaitość losów. Legendarny problem i bitwa o to, kto go rozwiązał.* Zamiast streszczać, odsyłam do oryginału:

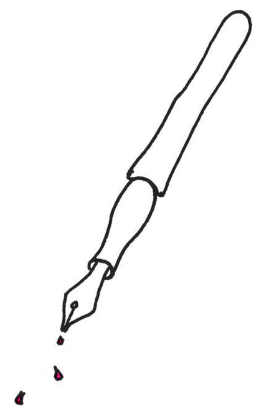
`http://www.newyorker.com/magazine/2006/08/28/manifold-destiny`.

W grudniu 2006 *Science*, potwierdzając dość powszechne wśród matematyków przekonanie, że Perelman nie tylko udowodnił jeden z problemów milenijnych Instytutu Claya, ale poważnie zmienił kawał matematyki, uznało dowód hipotezy

Rozwiązanie zadania M 1482.
Rozważmy dwa punkty P i Q na naszej krzywej, dzielące ją na dwie krzywe γ_1, γ_2 o równych długościach. Wtedy odległość między P i Q, liczona wzdłuż łuku okręgu wielkiego, wynosi mniej niż π. Niech N będzie środkiem tego łuku. Przyjmujemy, że jest to biegun północny naszej sfery. Pokażemy, że krzywa nie przecina równika sfery, czyli leży w całości na półkuli północnej.



Załóżmy przeciwnie, że krzywa γ_1 przecina równik w punkcie A. Niech γ_1' będzie obrazem γ_1 przy obrocie o 180° wokół osi wyznaczonej przez bieguny sfery. Punkty P i Q przy tym obrocie zamieniają się miejscami. Zauważmy, że krzywa $\gamma_1 \cup \gamma_1'$ ma taką samą długość jak $\gamma_1 \cup \gamma_2$, czyli mniejszą niż 2π. Z drugiej strony zawiera ona dwa punkty antypodyczne (punkt A i jego obraz przy obrocie), co oznacza, że jej długość wynosi co najmniej $\pi + \pi = 2\pi$. Ta sprzeczność kończy dowód.



Jak działa, można zobaczyć na stronie `https://math.berkeley.edu/~sethian/2006/Applications/ImageProcessing/Movienoiseremoval-character.lbl.mpeg`.

Poincarégo za najważniejsze wydarzenie naukowe roku. Odkrycia spoza matematyki – pewnie znacznie bardziej przemawiające do szerokiej publiczności niż twierdzenie głoszące, że jedyną trójwymiarową rozmaitością zwartą, na której wszystkie pętle są ściągalne, jest sfera S^3 – znalazły się tym razem na dalszych miejscach listy.

4. W 2010 roku Perelman nie przyjechał na doroczną konferencję Instytutu Claya, zorganizowaną w Paryżu. Laudacje poświęcone jego pracy wygłosili Andrew Wiles z Princeton (autor dowodu Wielkiego Twierdzenia Fermata), Michael Atiyah z Oksfordu (medalista Fieldsa z 1966 roku), Simon Donaldson z Oksfordu (medalista Fieldsa z 1986 roku), Michaił Gromow (laureat nagrody Abela z 2009 roku) oraz William Thurston (medalista Fieldsa z 1982 roku).

W lipcu 2010 roku Perelman odmówił przyjęcia przyznanej mu nagrody Instytutu Claya. Milion dolarów oraz opinia publiczna były dlań mniej ważne niż własne przekonanie, że w matematyce – w nauce – najważniejsza jest uczciwość. Nie mam pojęcia, co dokładnie myślał, choć chyba potrafię to sobie wyobrazić. Kto chce wiedzieć, o co chodzi, niech, zachowując należny dystans, poczyta np. wspomniany tekst z tygodnika *The New Yorker*.

5. Czy wolno nam osądzać wybory Perelmana? Moim zdaniem, nie wolno. Zdarzało mi się wprawdzie słyszeć, że taką postawą mógł tylko zaszkodzić matematyce i temu, jak jest publicznie odbierana; kto chciał widzieć w matematykach przede wszystkim nieżyciowych dziwaków, którym wskutek zajmowania się abstrakcyjnymi problemami czasem szajba odbija, miał w 2006 i 2010 roku świeżą pożywkę. Niemniej, Perelman nie tylko rozwiązał słynny problem, wędrując śmiałą, wręcz fantastyczną drogą. Jak powiedział w swojej laudacji Thurston: *Uczyliśmy się od Perelmana matematyki. Może powinniśmy zatrzymać się na chwilę, zastanowić nad sobą i wynieść lekcję także ze stosunku Perelmana do życia.*

A że ta historia wpływa na obraz matematyki wśród innych? Cóż, to inna sprawa, trochę nasza (każdy może opowiadać o matematyce, jak potrafi najlepiej), a trochę nie.

6. Dla mnie historia Perelmana, czy może raczej najnowsza historia tych gałęzi matematyki, które dla jego przełomu były kluczowe, jest (również) jeszcze jednym świadectwem, że w gruncie rzeczy nie ma podziału na matematykę teoretyczną i matematykę stosowaną – to znaczy nie ma ostrej granicy między nimi.

W 2011 roku nagrodę ICIAM Pioneer Prize, ufundowaną przez amerykańskie Towarzystwo Matematyki Przemysłowej i Stosowanej (SIAM), otrzymał James Sethian z Berkeley. Za co? *Za swoje fundamentalne metody i algorytmy, które wywarły wielki wpływ na takie zastosowania jak rozpoznawanie kształtów i obrazów w medycynie, geofizyce, tomografii oraz opis dynamiki kropli w drukarkach atramentowych.* Co się za tymi słowami kryje? Między innymi pomysł Sethiana, jaką metodą szybko i sprawnie rozwiązywać numerycznie, z dobrym przybliżeniem, równania takie jak potok Ricciego albo ewolucja powierzchni z prędkością równą średniej krzywiźnie. Jeden z powszechnie wykorzystywanych, skutecznych algorytmów oczyszczania obrazów z szumu wykorzystuje pomysły, zaczerpnięte z geometrii różniczkowej i analizy matematycznej.

W pierwszej połowie lat 90. dwudziestego stulecia Perelman i Sethian mieli szansę spotykać się na korytarzach w Berkeley. Ciekaw jestem, czy kiedykolwiek rozmawiali o matematyce, o tym, gdzie – wbrew dzielącym wielki tort matematyki na drobne, rozłączne kawałki – topologia spotyka równania różniczkowe, analizę (także numeryczną) i algorytmy, które jednak mają wpływ na życie wielu śmiertelników.

Znana jest wypowiedź Newtona, że mógł zrobić to, co zrobił, gdyż stał na ramionach gigantów. Nie byłoby historii Perelmana, gdyby nie Poincaré, Thurston, Hamilton. Matematyka **jest** sztuką pokonywania własnych granic, rozwiązywania problemów i wyciągania wniosków ze znalezionych rozwiązań; wszelkie próby dzielenia tej działalności na odrębne, ściśle rozgraniczone tematyczne działki są koniec końców skazane na porażkę. Prawdziwi odkrywcy przekraczają sztucznie stawiane granice.