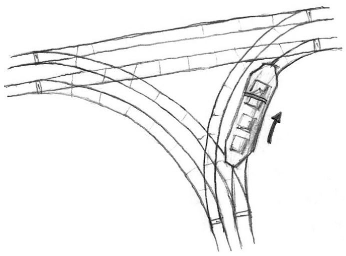
Matematyka torowa

*Piotr PIKUL**

* doktorant, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

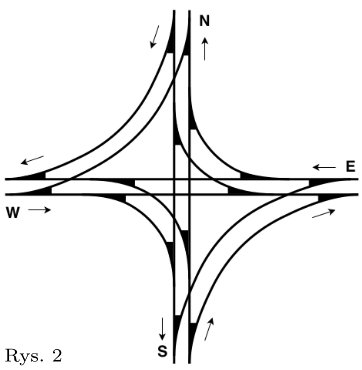
Podejrzewam, że znakomita większość Czytelników *Delty*, nawet jeśli nie mieszka, to miała okazję przebywać w dużych miejskich aglomeracjach z rozbudowaną siecią tramwajową i zetknąć się z miejscem, w którym spotykają się trzy dwutorowe odcinki trasy. Choć zdarzają się wyjątki, układ torowy w takich przypadkach zwykle wygląda tak jak na rysunku 1 i pozwala na przejazd we wszystkich możliwych relacjach – w tym przypadku mowa o sześciu (dla ścisłości: nie interesują nas przejazdy wymagające zmiany kierunku jazdy). Na użytek tego artykułu będziemy nazywać układ o tej własności *pełnym rozjazdem linii dwutorowych w trzech kierunkach.*



Rys. 1

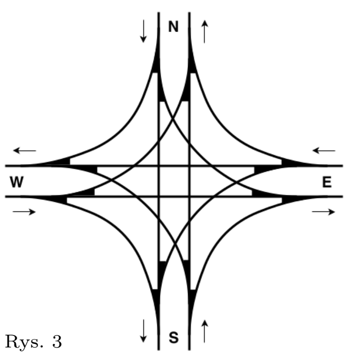
Pełny rozjazd przedstawiony na rysunku 1 zawiera sześć zwrotnic oraz trzy skrzyżowania toru pojedynczego. Mając na względzie Czytelników, którzy dotąd nie dokonywali pogłębionej analizy infrastruktury torowej, spieszymy z wyjaśnieniem, że zwrotnica to taki styk trzech odcinków toru, że jeden z nich jest trwale wyróżniony i nie można przejechać przez zwrotnicę, nie pokonując tego odcinka. Można albo wjechać od strony wyróżnionego *najazdu* i kontynuować podróż po jednym z dwóch *zjazdów*, albo wjechać od strony jednego ze zjazdów i wyjechać najazdem. Na występujących w dalszej części schematach zwrotnice będą zaznaczone poprzez zamalowanie kąta pomiędzy zjazdami. Odcinki torów będziemy oznaczać pojedynczą linią.

To, co w niniejszym artykule nazywam zwrotnicą, nosi fachowe miano *rozjazdu pojedynczego*, ale słowa *rozjazd* będę używał do innych celów. Będę także konsekwentnie pisał o najazdach i zjazdach zamiast o krzyżownicach i jeździe „na ostrze” lub „z ostrza”.



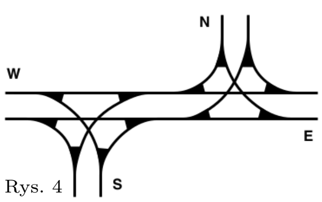
Rys. 2

Trzeba przyznać, że przedstawiona postać pełnego rozjazdu w trzech kierunkach jest bardzo intuicyjna i w pierwszej chwili może być nawet trudno wyobrazić sobie inne rozwiązanie. Sytuacja nieznacznie komplikuje się, gdy spotykają się cztery linie dwutorowe. Rozjazd pełny może wtedy wyglądać jak na schematach z rysunków 2 i 3. Układ z rysunku 3 jest nieco bardziej symetryczny, choć opiera się na podobnym pomyśle. W przypadku styku czterech linii, ze względu na znaczną złożoność przedstawionych pełnych rozjazdów, często mamy do czynienia z rozjazdem niepełnym (nie umożliwiającym przejazdu we wszystkich dwunastu relacjach). Takimi rozjazdami nie będziemy się zajmować.



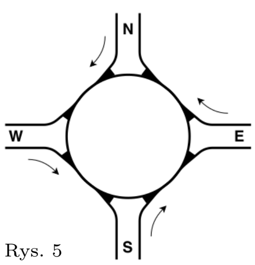
Rys. 3

Oba przedstawione pełne rozjazdy linii dwutorowych w czterech kierunkach zawierają po szesnaście zwrotnic, jednak układ z rysunku 2 zawiera tylko dwanaście skrzyżowań, podczas gdy układ z rysunku 3 – szesnaście. Gdyby wyobrazić sobie analogiczny, monstrualny, pełny rozjazd w pięciu kierunkach, zawierałby on aż trzydzieści zwrotnic. Pełny rozjazd w czterech kierunkach można zaprojektować również na inne sposoby, na przykład łącząc dwa pełne rozjazdy w trzech kierunkach (rys. 4). Taki układ torów zawierałby tylko dwanaście zwrotnic i sześć skrzyżowań, co czyni go (w pewnym sensie) prostszym od przedstawionych dotąd koncepcji.



Rys. 4

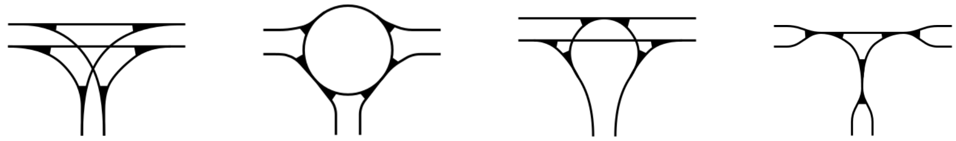
Tu może się pojawić pytanie, czy nie można znaleźć czegoś jeszcze „prostszego”? Aby przekonać się, że tak, należy udać się (wystarczy myślą) na słynne rondo w Będzinie, przy którym znajduje się pełny rozjazd tramwajowy zawierający zaledwie osiem zwrotnic. Jego schemat przedstawia rysunek 5. Taka koncepcja wydaje się bardzo elegancka, oszczędna i, w przeciwieństwie do poprzednio omówionych rozjazdów, umożliwia dodatkowo zawracanie. W praktyce przegrywa jednak choćby ze względu na zajmowaną większą powierzchnię. Inną jej wadą jest mniejsza przepustowość. Pomimo tych niedoskonałości ronda torowe można spotkać również w innych miastach, na przykład w Łodzi lub Brukseli. Rondo takie zostało także uwiecznione na obrazie Aleksandra Jędrzejewskiego *Łuk triumfalny w Paryżu.*



Rys. 5

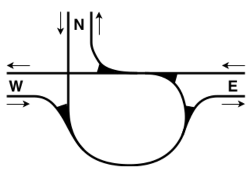
Z punktu widzenia czystej matematyki, gdzie przestrzeń może być nieograniczona, a tramwaje jednopunktowe, rondo jest *lepszym* pełnym rozjazdem. Jeśli interesuje nas pełny rozjazd linii dwutorowych w n kierunkach ($n \geqslant 3$), koncepcja ronda pozwala go zrealizować z wykorzystaniem $2n$ zwrotnic. Czy mniejsza liczba jest osiągalna? Dla $n = 3$ do budowy ronda potrzeba sześciu zwrotnic, czyli dokładnie tyle, ile wymaga „klasyczny” rozjazd.

Poniżej można zobaczyć także dwa nowe pomysły.



Teraz, w ramach odskoczni od podziwiania schematów, wykażemy, że najmniejszą możliwą liczbą zwrotnic pełnego rozjazdu linii dwutorowej w trzech kierunkach jest… 4.

Schemat rozjazdu możemy traktować jako graf nieskierowany, którego krawędziami są odcinki toru, a wierzchołkami rozgałęzienia, czyli zwrotnice. Do wierzchołków możemy także zaliczyć wlotowe i wylotowe odcinki. Dla pełnego rozjazdu linii dwutorowej w trzech kierunkach mamy więc sześć wierzchołków o stopniu 1 i pewną liczbę wierzchołków stopnia 3, czyli zwrotnic. Każdy odcinek toru ma dwa końce (albo są to zwrotnice, albo *liście* „na krawędzi schematu”), więc suma stopni musi być parzysta, czyli po odjęciu parzystej liczby liści dostajemy liczbę parzystą będącą trzykrotnością liczby zwrotnic. Zwrotnic musi zatem być parzyście wiele. Gdyby było to zero lub dwa, wtedy cały graf miałby albo sześć wierzchołków i trzy krawędzie, albo osiem wierzchołków i sześć krawędzi, czyli nie mógłby być spójny. Jednak od każdego wjazdu istnieje ścieżka do każdego wyjazdu, stąd wynika, że graf pełnego rozjazdu jest zawsze spójny, co jest możliwe dopiero przy wykorzystaniu co najmniej czterech zwrotnic.

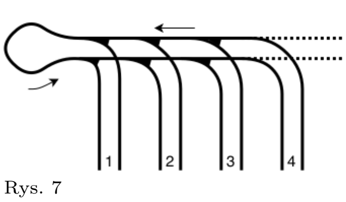


Rys. 6

W przedstawionym dowodzie nie wykorzystaliśmy wszystkich własności pełnego rozjazdu, więc Czytelnik Ostrożny zapewne oczekuje potwierdzenia, że cztery zwrotnice naprawdę wystarczą. Takim potwierdzeniem jest rysunek 6, który przedstawia *optymalny*, tj. wykorzystujący minimalną liczbę zwrotnic, pełny rozjazd linii dwutorowej w trzech kierunkach. Łatwo zauważyć jego praktyczną nieprzydatność, rozważając przejazd tramwaju z północy na zachód.

Skoro udzieliliśmy odpowiedzi dla $n = 3$, możemy się pokusić o rozstrzygnięcie kwestii większych rozjazdów. Powtarzając rozumowanie ze stopniami, otrzymujemy, że liczba zwrotnic musi być parzysta. Jest całkowicie naturalne, że minimalna liczba zwrotnic potrzebna do budowy pełnego rozjazdu jest funkcją niemalejącą ze względu na n. Wykażemy, że jest silnie rosnąca.

Niech będzie dany rozjazd optymalny w $n + 1$ kierunkach i wyobraźmy sobie likwidację jednego dwutorowego odcinka oraz wszystkich elementów rozjazdu, które od tego momentu nie będą potrzebne. Oznacza to usunięcie z grafu dwóch liści, które są połączone krawędziami z pewnymi zwrotnicami (możliwe, że z tą samą). Jeśli usuwana krawędź dochodzi do zwrotnicy od strony zjazdu, wystarczy zastąpić pozostałe dwie krawędzie dochodzące do tej zwrotnicy przez jedną (zastępujemy zwrotnicę prostym odcinkiem). W przeciwnym przypadku, gdy usuwany jest najazd, żaden przejazd przez zwrotnicę nie będzie już możliwy, więc usuwamy również pozostałe dwie krawędzie wychodzące ze zwrotnicy. Zauważmy, że za każdym razem usuwamy tylko te odcinki, na które nie da się wjechać z innego kierunku niż usuwany, czyli procedura nie narusza żadnej trasy przejazdu pomiędzy nieusuwanymi kierunkami. Po zakończeniu procedury zostajemy zatem z rozjazdem pełnym w n kierunkach. Usuwając jeden dwutorowy odcinek wychodzący z rozjazdu, musimy usunąć co najmniej dwie zwrotnice, czyli minimalna liczba zwrotnic dla n jest mniejsza przynajmniej o dwa od minimalnej ich liczby dla $n + 1$.

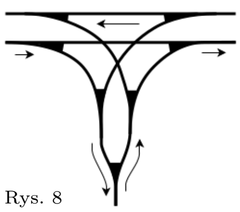


Rys. 7

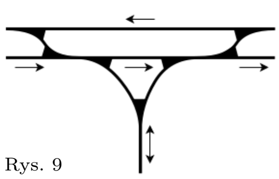
Powyższe rozumowanie prowadzi (dzięki indukcji matematycznej) do oszacowania liczby zwrotnic koniecznej dla pełnego rozjazdu w n kierunkach od dołu przez $4 + 2(n - 3) = 2n - 2$. Pozostaje pytanie, czy taki optymalny rozjazd istnieje dla każdego n? Odpowiedź jest twierdząca, a jedną z możliwych, ogólnych metod konstruowania takich rozjazdów przedstawia rysunek 7. Zauważmy, że ta metoda dla $n = 3$ daje inne optymalne rozwiązanie od przedstawionego wcześniej.

Tak określone rozwiązania optymalne umożliwiają zawracanie z każdego kierunku. Na pewno można uniemożliwić zawracanie z jednego kierunku (por. rys. 6). Jaka jest minimalna liczba zwrotnic, jeśli zażądamy, aby zawracanie było w ogóle niemożliwe? Co można powiedzieć, jeśli spróbujemy dodatkowo zminimalizować liczbę zwrotnic, przez które należy w najgorszym wypadku przejechać podczas pokonywania rozjazdu? Z tymi pytaniami pozostawię Czytelnika, a to jeszcze nie koniec.

W dotychczasowych rozważaniach omawialiśmy przypadek linii dwutorowych i (poza jednym przykładem) wszystkie odcinki pojedynczego toru w obrębie rozjazdu były jednokierunkowe. Być może Czytelnik Obeznany z Teorią Grafów dostrzegł, że problem optymalnego rozjazdu pełnego można w takim przypadku stosunkowo łatwo wyrazić w języku grafów skierowanych, nakładając odpowiednie ograniczenia na stopnie wierzchołków oraz żądając istnienia odpowiednich skierowanych ścieżek pomiędzy liśćmi. Istnieją jednak również linie jednotorowe, po których odbywa się ruch wahadłowy. W tym przypadku ściśle formalny opis problemu optymalnego rozjazdu pełnego byłby nieco bardziej skomplikowany. Ze względu na szczególne własności zwrotnic nie wystarczy mówić o skierowaniu krawędzi. Poszukiwanie eleganckiego formalizmu pozostawiam Czytelnikom Zmotywowanym. Wykazanie, że pełny rozjazd linii jednotorowych w n kierunkach ($n \geqslant 3$) wymaga użycia co najmniej n zwrotnic, jest bardzo podobne do przedstawionych rozważań na temat linii dwutorowych. Optymalne rozjazdy w tym przypadku również nie wydają się atrakcyjną propozycją dla projektantów rzeczywistych torowisk.



Rys. 8



Rys. 9

Ciekawie robi się, gdy rozważamy pełny rozjazd pewnej liczby linii dwutorowych i pewnej liczby linii jednotorowych. W rzeczywistości, gdy linię jednotorową należy połączyć z linią dwutorową w dwóch kierunkach, projektanci torowisk zwykle sięgają po rozwiązania wymagające siedmiu zwrotnic, takie jak na rysunkach 8 i 9. Wiedząc, jak wygląda optymalny pełny rozjazd dla linii dwutorowych w trzech kierunkach, łatwo domyślamy się, jak rozwiązać ostatni problem przy użyciu pięciu zwrotnic. Tu może pojawić się pytanie, czy to „najlepsze", co da się wymyślić? Czy połączenie pięciu pojedynczych torów może być „trudniejsze" od połączenia sześciu? Okazuje się, że tak! Ten „paradoks" wynika z istotnej różnicy pomiędzy torem dwukierunkowym a jednokierunkowym.

Podobnie jak poprzednio możemy przeanalizować sumę stopni wierzchołków schematu i zauważyć, że tym razem zwrotnic musi być nieparzyście wiele. Może wystarczą trzy? Bazując na wcześniej opisanym rozumowaniu na temat usuwania torów i zwrotnic, możemy stwierdzić, że po usunięciu jednego z dwutorowych odcinków (załóżmy, że chodzi o wjazd/wyjazd ze wschodu) pozostały układ torów nadal będzie umożliwiał przejazd z nieusuniętej linii dwutorowej na jednotorową w obu kierunkach ($\mathsf{W} \leftrightarrows \mathsf{S}$). Procedura wiązałaby się z usunięciem co najmniej dwóch zwrotnic. Gdyby początkowy pełny rozjazd zawierał tylko trzy zwrotnice, po wspomnianym demontażu pozostałaby dokładnie jedna. Łatwo zauważyć, że wygląd takiego jednozwrotnicowego rozjazdu jest wyznaczony jednoznacznie.

Gdybyśmy z początkowego układu o trzech zwrotnicach usunęli tylko jeden jednokierunkowy wylot, musiałyby pozostać dwie zwrotnice i taki układ umożliwiałby przejazd w czterech relacjach ($\mathsf{W} \leftrightarrows \mathsf{S}$, $\mathsf{E} \rightarrow \mathsf{S}$ oraz $\mathsf{W} \leftarrow \mathsf{E}$). Ponadto od tego momentu demontaż jednej zwrotnicy (i odpowiedniego odcinka toru) prowadzi do wspomnianego wcześniej prostego połączenia linii dwutorowej w jednotorową. Gdy jednak rozważymy każdą ze stosunkowo niewielu możliwości rozbudowy układu z jedną zwrotnicą, okaże się, że żadna nie pozwala na przejazd w oczekiwanych czterech relacjach. Otrzymujemy więc, że początkowy układ z trzema zwrotnicami nie mógł być pełnym rozjazdem.

Przedstawione rozważania nie są ściśle formalne, a przydatność uzyskanych wyników może się wydawać wątpliwa. Jest w tym jednak pewien powtarzający się w historii matematyki wzorzec, gdy obserwacje rzeczywistości prowadzą do nietrywialnych uogólnień. Być może przedstawione tu podwaliny *teorii torowisk* (?) są jednostkową ciekawostką dla miłośników matematyki rekreacyjnej (i/lub komunikacji miejskiej), a może znajdzie się śmiałek chętny kontynuować badania na tym polu? Można zastanowić się nad liczbą koniecznych skrzyżowań, rozważać rozjazdy z różnorodną liczbą wjazdów i wyjazdów albo zwrócić uwagę na obciążenie/przepustowość (tu można np. zastosować osiągnięcia teorii sieci przepływowych) poszczególnych odcinków toru przy ustalonym (choćby równomiernym) wykorzystaniu wszystkich relacji… Matematyka jak każda inna.