

# Salamandry buszują w JOWach

Andrzej DĄBROWSKI

W końcu 2016 roku sąd okręgowy stanu Wisconsin po raz pierwszy w historii wyborów do Kongresu USA zdecydował o zmianie dystryktów wyborczych. Uzasadnieniem było to, że jednomandatowe dystrykty wyborcze dawały niesprawiedliwą przewagę Republikanom. Zdaniem sądu partia ta, mając przewagę w kongresie stanowym, po spisie powszechnym 2010 roku wyznaczyła dogodny dla siebie układ dystryktów.

Spis powszechny, ogłaszany w USA co 10 lat (począwszy od 1930 zawsze 1 kwietnia), ustala aktualną liczbę ludności w USA. Na jego podstawie, zgodnie z Konstytucją, określa się liczbę kongresmanów reprezentujących każdy stan w Izbie Reprezentantów.

Rozdział drugi 14. poprawki Konstytucji USA stanowi: „Reprezentanci zostaną rozdzieleni między stany proporcjonalnie do ich liczności, ustalonej jako całkowita liczba mieszkańców każdego stanu, z wyłączeniem Indian niepodlegających opodatkowaniu”.

W każdym stanie ustala się jednomandatowe dystrykty wyborcze (tytułowe JOWy). Liczba dystryktów odpowiada aktualnej liczbie reprezentantów danego stanu. Z wyjątkiem stanów, które reprezentuje jeden członek Izby Reprezentantów (np. Alaska czy Vermont), dystrykty w każdym stanie powinny być tak wybrane, by miały zbliżoną liczbę ludności, a ich kształt winien być zwarty i spójny.

Pierwszy z tych problemów, polegający na podziale mandatów według zadanej proporcji ludności w stanach, nie ma jednoznacznego rozwiązania. Pisałem o tym już w *Delcie (Mandaty z urny,  $\Delta_{11}^{12}$ )*. Drugi problem jest o wiele trudniejszy. Dystrykty powinny być tak wyznaczone, aby nie tylko spełniały wymagania co do równej liczby ludności, miały odpowiedni kształt, uwzględniały proporcje rasowe, nie dzieliły miast, ale i odzwierciedlały proporcjonalne poparcie partii politycznych w stanie.

Manipulowanie kształtem dystryktów w celu uzyskania nieproporcjonalnie korzystnego wyniku wyborów jednomandatowych nazwano **gerrymanderingiem**.

Dziwny kształt, przypominający salamandrę, nadał w 1812 roku jednemu z dystryktów gubernator Massachusetts Elbridge Gerry – stąd **gerry** – **salamander**. Dzięki takim manipulacjom Demokraci uzyskali przewagę mandatów w stanie.

Gerrymandering jest coraz bardziej agresywny. Można konstruować wygodne dla siebie mapy, mając dostęp do danych o preferencjach wyborczych oraz wyspecjalizowanych narzędzi informatycznych (np. program *Maptitude*). Nastąpiło odwrócenie relacji: to nie wyborcy wybierają polityków, a politycy – wyborców.

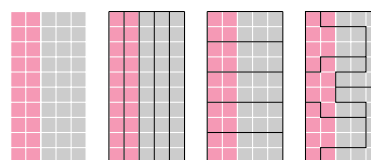
Udowodnienie, że mamy do czynienia z tendencyjnym podziałem stanu na dystrykty, jest niezwykle trudne. Sędzia Sądu Najwyższego USA Justice Stewart powiedział: *Gerrymandering jest jak pornografia – łatwo zobaczyć, trudno zdefiniować*. Sąd Najwyższy w 2004 roku odrzucił wszystkie dowody na gerrymandering, nazywając go problemem nierozstrzygalnym.

W poszukiwaniu metod wykrywania symptomów gerrymanderingu zaangażowali się również matematycy. Próbuje się zdefiniować, co to znaczy odpowiedni kształt dystryktu. Na Tufts University powstała grupa badawcza *Metric Geometry and Gerrymandering Group*. Co roku organizowany jest otwarty konkurs na prace, które pozwolą wykryć występowanie gerrymanderingu.

Problem gerrymanderingu dotyczy nie tylko USA, ale i innych krajów, nie wykluczając Polski. Wszędzie tam, gdzie mandaty ustalane są w jednomandatowych okręgach wyborczych, zagrożenie gerrymanderingiem jest możliwe.

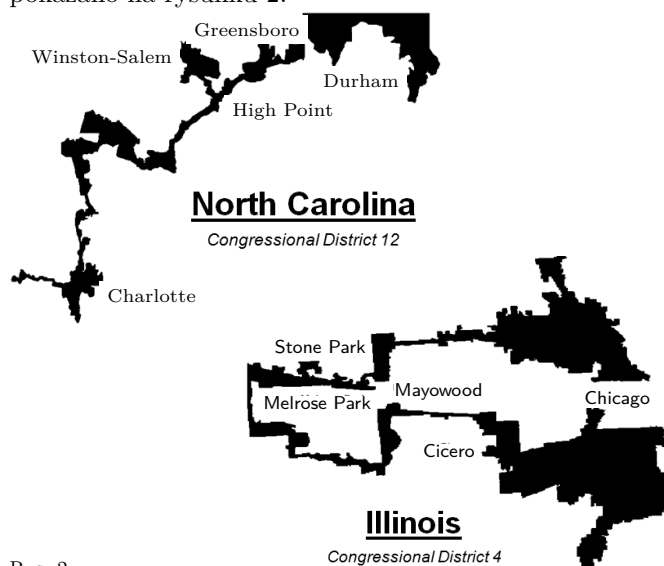
## Gerrymandering

Oto przykład obszaru, składającego się z 50 obwodów wyborczych, w którym zieloni mają 40% poparcia, a szarzy – 60%. Obszar należy podzielić na 5 równolicznych dystryktów.



Rys. 1

Obszar można podzielić zgodnie z proporcją głosów zielonych do szarych w całym obszarze (2:3) (rys. 1a), dokładnie sprzecznie z tą proporcją (0:5 i 3:2) (rys. 1b i 1c). Podział z rysunku 1b charakteryzuje się regularnymi kształtami dystryktów, a podział z rysunku 1c – nieregularnymi. Ze względu na kształty podział 1c nazwano by gerrymanderingiem. Niestety podział 1b nie zwróciłby niczyjej uwagi. Dopiero po wyborach okazałoby się, że podziały z rysunków 1b i 1c są manipulacją wyborczą. W rzeczywistości mamy czasami bardzo dziwny podział na dystrykty – przykłady dystryktów o fantazyjnych kształtach pokazano na rysunku 2.



Rys. 2

Należy sobie odpowiedzieć na pytanie: czy jest to zmanipulowany podział, czy też stan ma takie ograniczenia ludnościowe lub geograficzne, że lepszych dystryktów nie da się wykreślić?

### Rozwiązanie statystyczne

Naturalnym sposobem na stwierdzenie, czy przekroczono akceptowalny stopień gerrymanderingu, jest użycie testów statystycznych. Ich działanie podobne jest do matematycznego dowodu nie wprost. Bardzo upraszczając, dowód nie wprost polega na tym, że założenie, iż teza jest nieprawdziwa, prowadzi do fałszywego wniosku. W przypadku testów statystycznych uzasadnienie tezy, zwane w statystyce weryfikacją hipotezy roboczej (konkurencyjnej), polega na pokazaniu, że jej zaprzeczenie (hipoteza zerowa) prowadzi do mało prawdopodobnego, w świetle zebranych danych, wyniku.

Pierre Simon de Laplace na początku XIX wieku twierdził, że komety nie należą do Układu Słonecznego. Uzasadnienie tego stwierdzenia było statystyczne. Gdyby komety należały do Układu Słonecznego, to ich płaszczyzny orbitalne byłyby zbliżone do siebie, tak jak płaszczyzny orbitalne planet. Tymczasem obserwacje pokazywały, że płaszczyzny orbitalne komet były bardzo zróżnicowane. Jest więc mało prawdopodobnym, (Laplace nie wylicza tego prawdopodobieństwa), aby obiekty o tak zróżnicowanych orbitach należały do Układu Słonecznego.

**W czasach Laplace'a pojęcie testu statystycznego nie istniało.**

Testy statystyczne są uznanym sposobem weryfikacji hipotez. W ten sposób uznano za udowodnione istnienie cząsteczki Higgsa, skuteczność aspiryny w profilaktyce ataków serca czy nawet fakt, że rakiety V2 atakowały przypadkowe punkty Londynu.

Podstawowym problemem w testowaniu jest obliczenie prawdopodobieństwa wystąpienia nietypowych obserwacji (w „teście” Laplace'a: zróżnicowanych orbit komet), gdy prawdziwa jest hipoteza zerowa (np. że komety pochodzą z Układu Słonecznego). Obliczenia te mogą nie być proste z wielu powodów. Z jednej strony, należy określić symptomy (testy) nietypowych obserwacji, a z drugiej – znaleźć rozkład prawdopodobieństwa tych symptomów przy założeniu, że hipoteza zerowa jest prawdziwa.

W większości praktycznych sytuacji trudno jest znaleźć odpowiedni rozkład teoretyczny. Stosuje się wtedy techniki intensywnie wykorzystujące moc obliczeniową komputerów. Do nich należą metody Monte Carlo oraz metoda *MCMC* (*Monte Carlo Markov Chain*).

### Symptomy gerrymanderingu

W praktyce prawniczej tylko niektóre z wielu proponowanych symptomów zyskały popularność.

### Asymetria

Nietrudno zauważyć, że nawet mając mniejsze poparcie w obszarze, który będzie dzielony na dystrykty, można

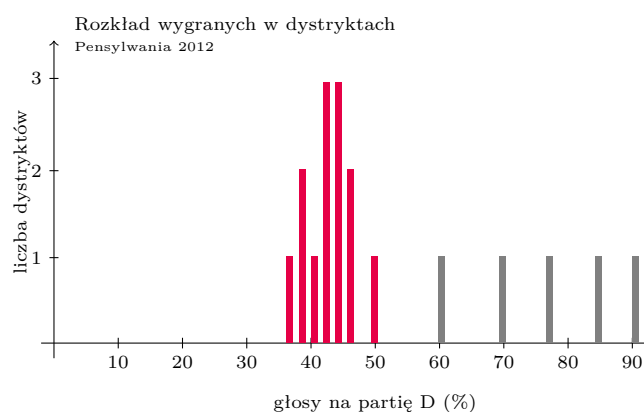
uzyskać przewagę mandatów na swoją korzyść. Metoda „dzielenie i pakowanie” polega na tym, że tworzy się dystrykty dla przeciwnika, wybierając do nich jak największą liczbę obwodów, w których ma on przewagę („pakowanie”). Pozostałe dystrykty tworzy się tak, aby uzyskać w nich minimalną przewagę, rozdzielając równomiernie obwody przeciwnika („dzielenie”).

Rozkład głosów na partię, której głosy zostały odpowiednio upakowane i podzielone w dystryktach, charakteryzuje się tym, że przeważają w nim wartości małe, a wartości duże i bardzo duże są rzadkie. Taki rozkład nazywany jest w statystyce dodatnio asymetrycznym (np. rozkład dochodów czy ciśnienia krwi u pacjentów).

W przykładowym podziale (rys. 1c) obwody szare upakowano do dwóch dystryktów, w każdym z nich 9 szarych i 1 zielony obwód. Pozostałych 12 szarych i 18 zielonych obwodów rozdzielono równo między trzy dystrykty. Powstały trzy dystrykty z 60-procentową wygraną zielonych i dwa z 90-procentową przewagą szarych. Wybory wygrywają zieloni w stosunku 3:2, mimo że w całym obszarze oddano na nich tylko 40% głosów. Rozkład wyników dla szarych 40, 40, 40, 90, 90 jest dodatnio asymetryczny.

W wyborach z 2012 roku w Pensylwanii rozkład głosów oddanych na Demokratów w 18 dystryktach był dodatnio asymetryczny.

Mimo że w całym stanie poparcie dla Demokratów było nieznacznie większe (50,28% głosów), to uzyskała ona tylko 5 mandatów (27,78%). Rządząca w Pensylwanii partia Republikańska tak rozdzieliła dystrykty, że znaczące poparcie na Demokratów skupiło się w 5 dystryktach, a w pozostałych 13 z niewielką przewagą wygrali Republikanie.



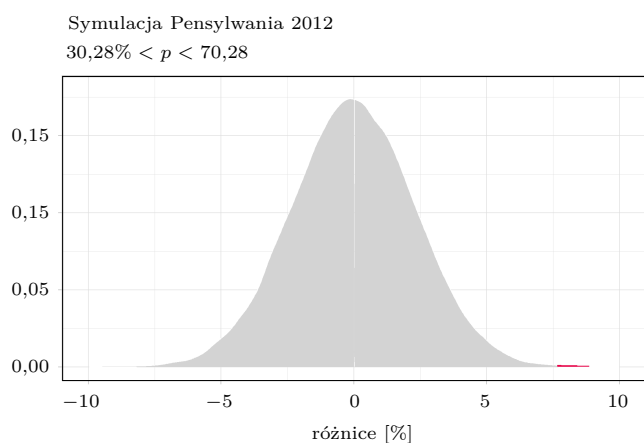
Rys. 3. Kolorami (zielony – Republikanie, szary – Demokraci) oznaczono dystrykty, w których wygrała dana partia.

Wielkość asymetrii można zmierzyć różnicą między średnią arytmetyczną a medianą. Dla rozkładów dodatnio asymetrycznych ta różnica jest dodatnia, dla symetrycznych – równa 0. Takiej metody użyły niektóre sądy w Stanach Zjednoczonych, uznając, że występuje gerrymandering, gdy ta różnica jest duża.

W przypadku wyborów w Pensylwanii różnica między średnią a medianą wśród danych z 18 dystryktów wynosiła 7,71%. Czy ta różnica jest duża? Zgodnie z metodologią testowania należałoby ocenić, jakie byłoby prawdopodobieństwo przekroczenia tej wartości, gdyby rozkład głosów na Demokratów w 18 dystryktach był symetryczny wokół 50,28%. Przyjmując, że procent głosów w dystryktach ma rozkład jednostajny w przedziale (30,28; 70,28), prawdopodobieństwo, że różnica między średnią a medianą jest większa niż 7,71%, wynosi 0,0004.

Wniosek: Jest niezwykle mało prawdopodobne, aby w tej sytuacji rozkład wyników głosowania na Demokratów był symetryczny wokół 50,28%.

Symulacja metodą Monte Carlo (próbka 10 000 powtórzeń). Używany zazwyczaj w tej sytuacji test t Studenta nie jest dobrym rozwiązaniem.



Rys. 4

Na rysunku 4 przedstawiony jest rozkład różnic między średnią a medianą w 18 dystryktach, przy założeniu symetrii rozkładu głosów na Demokratów ze średnią 50,28%. Ledwo widoczny czerwony obszar na prawo od 7,71 odpowiada prawdopodobieństwu osiągniętego wyniku w wyborach przy tym założeniu.

## Rozwlekłość

Zauważono, że w stanach z dystryktami o dziwnych, rozwlekłych kształtach dochodzi do niesprawiedliwego podziału mandatów. Sąd Najwyższy USA wielokrotnie powtarzał w swoich ocenach, że *dziwnie wyglądające kształty są wskaźnikami złych intencji*.

Aby ocenić stopień tej manipulacji, należałoby znaleźć jakiś „wskaźnik dziwności kształtu”. Jednym ze stosowanych jest wskaźnik Polsby’ego–Poppera (wskaźnik *PP*), będący stosunkiem pola powierzchni dystryktu do pola koła o obwodzie równym obwodowi dystryktu. Z nierówności izoperymetrycznej wynika, że wskaźnik ten nigdy nie przekracza 1 – wartości dla koła, czyli obszaru idealnie „niedziwnego”.

Pole wewnątrz prostej zamkniętej krzywej płaskiej o długości  $L$  jest największe dla koła o obwodzie  $L$  (p. artykuł w  $\Delta_{11}^4$  *Symetryzacja Steinera*).

Jednak nie zawsze małe wartości *PP* wskazują na zafałszowanie, a duże na poprawność wyborów. Podział

z rysunku 1a, gdzie dystrykty są najbardziej wydłużone (wskaźnik *PP* jest najmniejszy i wynosi około 0,26), idealnie odpowiada proporcjom głosów. Podział z rysunku 1b ( $PP \approx 0,64$  jest największy) skrajnie zafałszowuje proporcje głosów

*PP* zależy też od skali mapy – im mniejsza skala, tym mniejsze wartości. Odpowiedzialny za to jest efekt fraktalny – im mniejsza skala, tym dłuższa jest linia brzegowa.

## Niezgodność głosów i mandatów – wskaźnik *EG*

Najbardziej przemawiającym do wyobraźni jest wskaźnik *EG* (*Efficiency Gap* – wskaźnik niewykorzystanych głosów). Wskaźnik ten liczy frakcję różnicy niewykorzystanych przez partie głosów w stosunku do ogólnej liczby oddanych głosów.

Artykuł *Jak wykryć salamandrę w  $\Delta_{18}^4$*  poświęcony jest wadom i zaletom *EG*.

Gdy partia zdobywa mandat w danym dystrykcie, to głosy niewykorzystane są nadwyżką nad połową głosów niezbędną do jego uzyskania. Gdy partia nie zdobywa mandatu, to wszystkie oddane na nią głosy są niewykorzystane.

Na rysunku 1a zieloni stracili po 5 głosów w dwóch dystryktach, szarzy – po 5 głosów w trzech. Różnica 15 – 10 = 5 głosów dla szarych oznacza, że nie wykorzystali oni 5/50 = 10% wszystkich głosów. Jest to właśnie współczynnik *EG* dla szarych (dla zielonych wynosi on –10%). Jak widać, *EG* nie oddaje poprawnego podziału na dystrykty w tym przypadku. Lepiej byłoby, gdyby stracone głosy były liczone proporcjonalnie do zasobu głosów danej partii na całym obszarze (stanie). Tu zieloni stracili 10/20 = 50% swoich głosów, szarzy 15/30 = 50%, więc skorygowany współczynnik *EG* ( $\overline{EG}$ ) wynosi 0%. Mimo wielu niekorzystnych własności *EG* wysokie wartości tego wskaźnika (powyżej 7%) są przyjęte jako argument sądowy przemawiający za gerrymanderingiem.

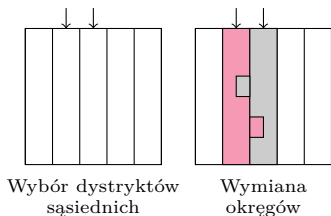
Szerzej: [dustingmixon.wordpress.com/2017/10/11/an-impossibility-theorem-for-gerrymandering/](http://dustingmixon.wordpress.com/2017/10/11/an-impossibility-theorem-for-gerrymandering/)

Anthony Kennedy, sędzia Sądu Najwyższego USA, zalecał użycie *EG* jako obiektywnego testu: *Setka różnych sędziów może badać te same mapy i pod warunkiem, że są oni biegli w arytmetyce, dojdą oni do identycznych konkluzji, czy mapy mieszczą się w dopuszczalnym zakresie i które z nich należy uznać za niekonstytucyjne*. (cyt. za: [ballotpedia.org/Efficiency\\_gap](http://ballotpedia.org/Efficiency_gap)).

## Metoda MCMC – test $\sqrt{\epsilon}$

Rozkład prawdopodobieństwa symptomów gerrymanderingu jest trudny do wyznaczenia głównie z powodów geograficzno-politycznych. Lista wszystkich możliwych podziałów na dystrykty w danym stanie spełniających prawnie wymagane warunki spójności, reprezentatywności rasowej i niepodzielności miast jest trudna do ustalenia.

Szczegóły twierdzenia Pegdena można znaleźć w pracy: M. Chikina, A. Frieze, W. Pegden *Assessing significance in a Markov chain without mixing*, PNAS March 14, 2017 114 (11) 2860-2864.



Rys. 5

**Nieprzywiedność** – z każdego stanu można przejść do każdego.

**Odwracalność** – prawdopodobieństwo przejścia trajektorii  $i_0, i_1, \dots, i_k$  jest równe prawdopodobieństwu przejścia trajektorii  $i_k, i_{k-1}, \dots, i_0$ .

**Stacjonarność** – dla każdego stanu startowego po odpowiednio długim czasie łańcuch zbiega do tego samego rozkładu  $\pi$ .

Do utworzonego łańcucha map można zastosować twierdzenie Pegdena. W tym przypadku  $X_0$  jest mapą podlegającą ocenie,  $X_1, \dots, X_k$  – mapami wygenerowanymi w kolejnych krokach.  $\pi$  jest rozkładem prawdopodobieństwa w przestrzeni wszystkich dopuszczalnych map. Etykiety  $e_i$  to wartości funkcji opisującej wartości testu na występowanie gerrymanderingu (np. różnica między średnią a medianą, miara rozwlekłości

$1/PP$ , współczynnik  $EG$ ,  $\widetilde{EG}$ ). Z twierdzenia Pegdena wynika, że prawdopodobieństwo wystąpienia  $\varepsilon$ -outliera w ciągu  $e_0, e_1, \dots, e_k$  nie przekracza  $\sqrt{2\varepsilon}$ .

Oszacowanie prawdopodobieństwa wystąpienia symptomu gerrymanderingu na zaobserwowanym poziomie jest możliwe dzięki algorytmowi „pełzającego” generowania map podziału na dystrykty i twierdzeniu udowodnionemu przez Wesleya Pegdena i innych.

Algorytm startuje od mapy, która podlega ocenie. W kolejnych krokach nowa mapa powstaje przez wymianę pary losowo wybranych obwodów na granicy dwóch losowo wybranych sąsiadujących ze sobą dystryktów. Jeśli ta wymiana prowadziłaby do podziału prawnie niedozwolonego, losowanie powtarza się aż do skutku. Ciąg map utworzonych w kolejnych krokach tworzy łańcuch Markowa.

**Twierdzenie** (Pegden, test  $\sqrt{\varepsilon}$ ). Niech  $\mathcal{M} = X_0, X_1, \dots$  będzie odwracalnym, nieprzywiednym łańcuchem Markowa o stacjonarnym rozkładzie stanów  $\pi$ . Przypuśćmy, że stanom  $\mathcal{M}$  przypisano etykiety o wartościach rzeczywistych. Jeżeli  $X_0$  ma rozkład  $\pi$ , wtedy dla każdego ustalonego  $k$  prawdopodobieństwo, że etykieta  $X_0$  jest  $\varepsilon$ -outlierm wśród etykiet przypisanych trajektorii  $X_0, X_1, \dots, X_k$ , nie przekracza  $\sqrt{2\varepsilon}$ .

Etykieta  $e_0$  jest  $\varepsilon$ -outlierm dla ciągu etykiet  $e_0, e_1, \dots, e_k$ , gdy

$$\frac{\#\{i : e_i \geq e_0\}}{k+1} \leq \varepsilon$$

Gdy na bazie mapy  $X_0$  wygenerujemy 1000 map i  $e_0 > \max(e_1, e_2, \dots, e_{1000})$ , to prawdopodobieństwo, że  $e_0$  osiągnęło przypadkowo tak dużą wartość, jest mniejsze niż 0,045. Gdy wśród 1000 dodatkowo wygenerowanych map pięć będzie miało wartości co najmniej takie jak  $e_0$ , to mapa  $X_0$  nie może być uważana za zmanipulowaną, gdyż prawdopodobieństwo takiego wyniku wynosi 0,11, co jest stosunkowo wysokim prawdopodobieństwem.

Z twierdzenia Pegdena można też oszacować, ile „pełzających” map należy wykonać, aby uzyskać zadany poziom dziwności tej mapy (zwany w statystyce poziomem istotności). Aby prawdopodobieństwo, że duża wartość etykiety  $e_0$  jest przypadkowa, nie przekroczyło 0,05, należy wygenerować więcej niż  $800 \cdot r$  map takich, że spośród nich dokładnie  $r - 1$  etykiet ma wartość co najmniej tak dużą jak  $e_0$ . Analizując tą metodą podział Pensylwanii na dystrykty w 2012 roku, obliczono, iż prawdopodobieństwo, że obserwowane wartości różnicy między średnią i medianą są przypadkowo tak duże, jest mniejsze niż 0,0004. Oznacza to silne argumenty za wystąpieniem gerrymanderingu. Wymagało to bardzo wielu godzin pracy silnych komputerów.

## Finał

Rozstrzygnięcie o możliwości wystąpienia gerrymanderingu wymusza na sądach użycie coraz bardziej skomplikowanych metod matematycznych i statystycznych. Wykraczają one daleko poza umiejętności arytmetyczne, o których mówił sędzia Kennedy.

Tradycyjne sądownictwo broni się przed takimi nowinkami. Nawet wskaźnik  $EG$  spotyka się z oporem. Jeden z sędziów argumentował, że trudność w zrozumieniu tego wskaźnika, z jaką społeczeństwo mogłoby się spotkać, doprowadziłaby ostatecznie do osłabienia wiarygodności sądu. Inny z kolei powiedział: *Może to po prostu wynikać z mojego wykształcenia, ale mogę ten wskaźnik opisać tylko jako socjologiczny belkot.*

W reakcji na takie wypowiedzi w kwietniu 2018 roku pojawiła się na Uniwersytecie Princeton praca pod tytułem *Antidotum na belkot. Propozycja zestawu narzędzi dla sędziów do testowania stronniczego gerrymanderingu*. W pracy tej proponuje się m.in. użycie testu Studenta do oceny zagrożenia gerrymanderingiem. I na jej końcu pojawia się złośliwe stwierdzenie: *Skoro piwowarzy potrafią wykorzystać moc statystycznego rozumowania, z pewnością sędziowie też mogą.*

Nadeszły ciekawe czasy dla prawników.

Test Studenta powstał przy okazji kontroli jakości w browarze Guinnessa.