Jak wykryć salamandrę?

Anna ŁEŃ, Marcin MICHORZEWSKI***

*studentka, Międzyobszarowe Studia Matematyczno-Przyrodnicze, UW
**student, Wydział MIM UW

W dniach 6–17 września 2017 r. odbyła się druga edycja międzynarodowego obozu **Maths Beyond Limits**. *W czasie obozu 60 uczestników z Polski, Węgier, Czech i Słowacji wzięło udział w warsztatach matematycznych prowadzonych przez studentów i pracowników naukowych najlepszych polskich i zagranicznych uczelni. Uczestnicy mieli także okazję do zaprezentowania własnych referatów oraz do uczestnictwa w ogólnorozwojowych zajęciach wieczornych. Ponadto, na obozie odbyły się: mecz matematyczny, zawody Relays (oparte na konkursie Náboj), Olympic Challenge, a także zajęcia sportowe i integracyjne.*

Wszelkie szczegóły na temat obozu można znaleźć na stronie `mathsbeyondlimits.eu`. *Kolejna edycja odbędzie się w dniach 9–21 września 2018 roku. Licealistów zainteresowanych matematyką zachęcamy do udziału w rekrutacji, która ruszyła 1 kwietnia.*

Poniższy artykuł prezentuje przykładową tematykę poruszaną podczas obozu.

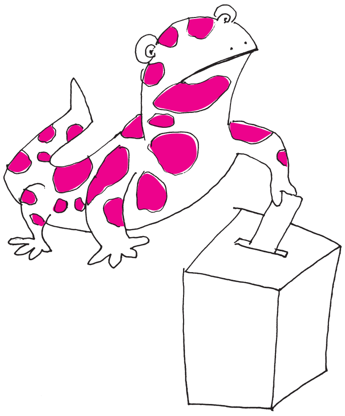
Przyjrzyjmy się problemowi, przed którym staje legislator wyborczy: **podział kraju na okręgi wyborcze**. Ordynacja wyborcza występująca w Stanach Zjednoczonych przy *House of Representative* polega na wybraniu 435 kandydatów z 50 stanów. Każdy stan podzielony jest na jednomandatowe *okręgi* zwane też *dystryktami*. W każdym dystrykcie dokładnie jedna partia wygrywa, zdobywając miejsce w *House of Representative*. Okręgi są zdefiniowane przez terytorium, powinny być spójne oraz mieć taką samą populację. Liczba okręgów w danym stanie podyktowana jest populacją i już ona jest przedmiotem wielu dyskusji. Więcej na ten temat można znaleźć w literaturze pod nazwą *apportionment*. Upraszczając nieco problem, przeanalizujemy, w jaki sposób sprawiedliwie dokonać podziału na okręgi wyborcze.

W Δ^{10}_{17} dowiedziono, że nie da się wyłonić zwycięzcy w wyborach, nie łamiąc co najmniej jednej z zasad sprawiedliwości.

Okazuje się, że manipulując podziałem na okręgi, nie zmieniając liczby wyborców w okręgach, można zmienić wyniki wyborów. Manipulacja w tym zakresie nazywa się *gerrymanderingiem*. Nazwa jest zbitką nazwiska amerykańskiego polityka **Elbridge'a Gerry'ego** oraz **salamandry**. W 1812 roku E. Gerry, jako gubernator stanu Massachusetts, zarządził podział stanu na dystrykty w taki sposób, aby zapewnić przewagę Partii Demokratyczno-Republikańskiej. Jeden z okręgów przypominał mityczną salamandrę i został określony przez *Boston Gazette* jako Gerry-mander. Od tego czasu problem nie zniknął, Stany Zjednoczone stale podejmują działania mające walczyć z tym problemem.

Wprowadzenie wskaźnika

Dla uproszczenia przyjmijmy, że w wyborach kandydują tylko 2 partie: A i B. Wygrywają one miejsca w rządzie, które potem we własnym zakresie rozdzielają. Zakładamy, że okręgi są jednomandatowe (ich liczba S jest ustalona z góry), że w każdym jest taka sama liczba wyborców oraz że w każdym ważne głosy oddaje dokładnie tyle samo osób. Zbiór okręgów oznaczmy przez $\mathbf{D} = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_S\}$. Przyjmijmy następujące oznaczenia:



- $\mathbf{D}^P \subset \mathbf{D}$ – zbiór okręgów, w których wygrała partia P,
- V_i^P – liczba głosów zdobytych przez partię P w okręgu δ_i,
- V^P – całkowita liczba głosów oddanych na partię P,
- V_i – liczba wszystkich głosów oddanych w okręgu δ_i,
- S_i^P – liczba miejsc zdobytych przez partię P w i-tym okręgu ($S_i^P \in \{0, 1\}$),
- S^P – liczba wszystkich miejsc zdobytych przez partię P,
- V – liczba wszystkich głosów oddanych w wyborach.

Zatem głosów oddanych w każdym okręgu jest dokładnie $V_i = \frac{V}{S}$, dla $i = 1, 2, \ldots, S$. Wskaźniki ν i σ oznaczają przewagę partii A odpowiednio w głosach, które oddali wyborcy oraz miejscach, które uzyskała:

$$\nu = \frac{V^A - V^B}{V}, \qquad \sigma = \frac{S^A - S^B}{S}.$$

Głosami zmarnowanymi (*wasted votes*) nazywamy wszystkie głosy na przegraną partię oraz na wygraną powyżej progu 50% (tzn. te, które były zbędne do zwycięstwa). Oznacza to, że zawsze połowa głosów jest zmarnowana.

Analogicznie jak poprzednio, niech W_i^P to będzie liczba głosów zmarnowanych w okręgu δ_i przez głosujących na partię P, zaś W^P – liczba zmarnowanych głosów we wszystkich okręgach. Zachodzi następująca zależność $W_i^A = V_i^A - S_i^A \cdot \frac{V_i}{2}$ (przypomnijmy, że okręgi są jednomandatowe). Spójrzmy, jak wyglądają głosy zmarnowane na partie A i B. W tym celu zdefiniujmy współczynnik *efficiency gap*

$$EG = \sum_{i=1}^{S} \frac{W_i^A - W_i^B}{V} = \frac{W^A - W^B}{V}.$$

Jeżeli EG jest dodatnie, oznacza ono niesprawiedliwość wobec partii A, gdy ujemne, to dla B. Gdy $EG \approx 0$, wówczas obie partie straciły podobną liczbę głosów i taką sytuację uznaje się za sprawiedliwą.

Przyjrzyjmy się bliżej informacji, którą niesie współczynnik EG. Zauważmy, że

$$W_A = \sum_{i=1}^{S} W_i^A = V^A - S^A \frac{V}{2S},$$

stąd

$$EG = \frac{V^A - V^B}{V} - \frac{1}{2}\frac{S^A - S^B}{S} = \nu - \frac{1}{2}\sigma.$$

Niektóre usterki współczynnika EG:

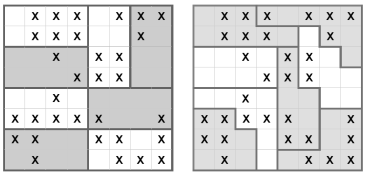
- Współczynnik EG nie odwzorowuje proporcji głosów w liczbie zdobytych miejsc. Tzn. jeśli partia A zdobywa w całym kraju 66% głosów, zaś partia B uzyskała 34%, to wówczas $\nu = 0{,}32$. Aby współczynnik EG był jak najbliższy 0, to $\sigma = 0{,}64$, czyli partia A powinna zdobyć 82% miejsc, zaś partia B tylko 18%.
- Jeśli partia A będzie miała co najmniej 79% poparcia w społeczeństwie, to niezależnie jak wybierzemy okręgi, będzie
$$\nu - \frac{1}{2}\sigma \geqslant 0{,}58 - 0{,}5 > 0{,}07;$$
wybory zawsze byłyby więc niesprawiedliwe (jeśli uznamy, że takie są wtedy, gdy EG przekracza 0,07). Wynika to z tego, że *przewaga wygranych miejsc* ma 2 razy mniejsze znaczenie od *przewagi głosów* w społeczeństwie.
- Dla okręgu i poziom sprawiedliwości $EG_i = \frac{W_i^A - W_i^B}{V_i}$ wynosi zero tylko wtedy, gdy jedna partia zdobędzie 3 razy więcej głosów od drugiej. Wtedy sprawiedliwym podziałem jest taki, w którym w każdym z okręgów proporcje głosów wynoszą 3 : 1.

Zachęcamy do przyjrzenia się nieco poprawionej metodzie mierzenia niesprawiedliwości

$$\widetilde{EG} = \frac{W^A}{V^A} - \frac{W^B}{V^B}.$$

Nie istnieje jednoznaczny, powszechnie stosowany sposób sprawdzania, czy podział jest sprawiedliwy. W Stanach Zjednoczonych powoływane są specjalne zespoły czuwające nad takimi podziałami. Zauważmy, że nie wszystkie założenia przytoczonego modelu daje się spełnić (np. równa liczba wyborców w każdym okręgu i jednocześnie równa liczba oddanych głosów), stąd pole do poprawy modelu jest jeszcze spore.

Przykład 1. Każde pole planszy przedstawia jednego głosującego. × oznacza głos oddany na partię A, puste pole to głos oddany na partię B. Na rysunku z lewej obie partie zdobywają taką samą liczbę mandatów. Jeśli jednak zmienimy kształt okręgów tak jak na rysunku z prawej strony, to wygra partia A, zdobywając 5 mandatów.



Z lewej współczynnik $EG = 0$, z prawej wynosi $-\frac{1}{8}$.

Przykład 2. Można znaleźć przykład takich wyników głosowania na dwie partie, żeby w jednym układzie okręgów wygrała partia A, a w innym B.

Przykład 3. Czy możliwe jest, żeby sytuacja z przykładu 2 miała miejsce, gdy okręgi są dwumandatowe?

W 2015 roku w USA odbyła się rozprawa pod nazwą „Gill v. Whitford", w której sąd najwyższy zgodnie z radą pomysłodawców *efficiency gap* zasądził, że maksymalny dopuszczalny poziom EG to 0,07. Tym samym stwierdzono, że wybory z 2012 i 2014 roku w Wisconsin były niekonstytucyjne (EG wyniosło odpowiednio 0,13 oraz 0,1).

Przykład 4. W wyborach startują dwie partie. Przyjmując, iż sprawiedliwy jest taki podział, że $EG = 0{,}07$, jakie jest najmniejsze procentowe poparcie dla jednej z partii, żeby miała ona większość w parlamencie?

Zadania

Przygotował Michał NAWROCKI

F 949. Cegła spada na piłkę tenisową z wysokości 1 m i odskakuje, praktycznie biorąc, na taką samą wysokość, z jakiej spadła. Na jaką wysokość podskoczy piłka?
Rozwiązanie na str. 7

F 950. Przy fotografowaniu tygrysa nie zaleca się do niego zbliżać bardziej niż na odległość $L = 20$ m. Jaką głębokość powinna mieć camera obscura z otworem o średnicy $d = 1$ mm, aby na fotografii były widoczne pręgi na skórze tygrysa? Przyjąć, że odległość między pręgami wynosi $l = 20$ cm.
Rozwiązanie na str. 7