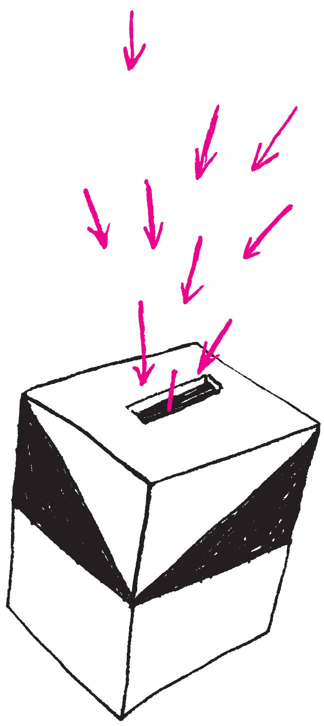
Postęp

Wojciech CZERWIŃSKI

Wydaje się, że postęp naszej cywilizacji dokonuje się głównie w ten sposób, że coś nowego umiemy, my, ludzie, skonstruować czy dokonać. Przykłady można mnożyć, podróżując poprzez wieki, widzimy: rozpalanie ognia, budowę koła, wytapianie brązu i żelaza, budowę murów warownych, wynalazek prochu, leczenie nowych chorób, udoskonalenie druku, budowę statków dalekomorskich, wreszcie wynalazki maszyny parowej, radia, ostatnio tranzystory i następujące po nich komputery, energia jądrowa, czy wynalazek wielkiej światowej sieci łączności – Internetu. Oczywiście, niektóre usprawnienia dokonują się przez wiele lat lub wieków na drodze mozolnych procesów. Sceptycy mogliby powiedzieć, że to dalece nie wszystko, bo postęp dokonuje się również w ten sposób, że coś więcej wiemy lub rozumiemy. Niekoniecznie umiemy to od razu wykorzystać, ale po paru latach lub dekadach – tak. Niech przykładami z ostatnich wieków będą zrozumienie: elektryczności – co zmieniło fizykę i technikę; istnienia bakterii – co zmieniło medycynę; istnienia genów, a wieki później budowy tych genów – co w naszych czasach zmienia biologię i medycynę; budowy atomu – co zmieniło sztukę wojenną i w efekcie przyniosło dekady pokoju; pochodnych i całek – co zrewolucjonizowało technikę i wiele, wiele innych.

Ale czy może być jeszcze jakiegoś innego rodzaju postęp? Czy może dokonywać się poprzez zrozumienie, że czegoś nigdy nie uda nam się zrobić? Przecież nigdy nie przyniesie to niczego praktycznego. Tak jest jedynie pozornie! Po pierwsze, gdy rozumiemy, czego nie uda się zrobić, to nie tracimy już sił na podążanie tą ścieżką. Poza tym czasami sama niemożliwość zrobienia jednej rzeczy powoduje możliwość zrobienia innej – jak w kryptologii. A możliwe, że znajdziemy i inne takie dziedziny. Ale chyba najbardziej fundamentalna wartość poszukiwania ograniczeń jest taka, że zrozumienie, czego nie da się zrobić, jest nieodłączną częścią zrozumienia Wszechświata. A to, nawet jeśli kierujemy się tylko pragmatyzmem, może się przydać, chociaż jeszcze nie wiemy do czego.

Głównymi bohaterami tego numeru są właśnie bariery, ograniczenia, które nie pozwalają nam na pewne działania, konstrukcje, dokładne badania. Pozornie są jedynie kłodami rzucanymi nam przez Wszechświat pod nogi. Ale po głębszym przyjrzeniu się Czytelnik Koneser może w nich dostrzec jedyny w swoim rodzaju urok.



(Nie)sprawiedliwe wybory

*Joanna OCHREMIAK**

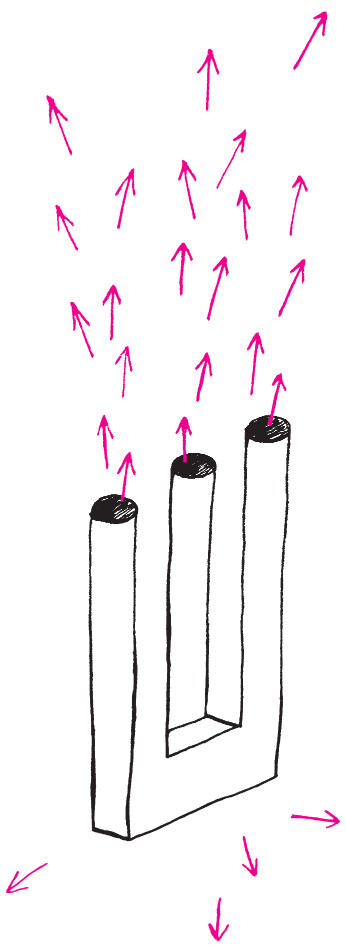
Ustalenie wspólnego stanowiska przez grupę ludzi wymaga często w pierwszym kroku wyboru metody podjęcia zbiorowej decyzji. Kluczowe stają się wówczas pytania: Jaka metoda jest sprawiedliwa? Jaka metoda najlepiej odzwierciedli preferencje członków grupy?

Jednym z modeli zbiorowego podejmowania decyzji są *funkcje społecznego dobrobytu*. Załóżmy, że grupa $n \geqslant 2$ osób $\{w_1, \ldots, w_n\}$, nazwijmy ich *wyborcami*, chce podjąć wspólną decyzję w sprawie k różnych *alternatyw* (czyli możliwości). Zbiór wyborców oznaczmy przez W, natomiast zbiór alternatyw przez A. Przyjmijmy, że każda z osób potrafi uporządkować zbiór alternatyw od najlepszej do najgorszej jej zdaniem alternatywy – przyporządkowując alternatywom liczby od k (najlepsza) do 1 (najgorsza). Zapis $a >_i a'$ oznacza, że wyborca w_i uważa alternatywę a za lepszą od alternatywy a'. Dla uproszczenia wykluczamy „remisy”. Każda z osób ma zatem do wyboru $k!$ możliwych uporządkowań – ich zbiór oznaczmy przez $\mathcal{U}(A)$.

Funkcję $f\colon \mathcal{U}(A)^n \to \mathcal{U}(A)$ nazywamy *funkcją społecznego dobrobytu.* Przyporządkowuje ona krotce n uporządkowań alternatyw (odpowiadającym preferencjom wyborców $w_1, \ldots, w_n$) jedno uporządkowanie, które uznajemy za zbiorową decyzję. Zapis $a > a'$ oznacza, że grupa uznaje alternatywę a za lepszą od alternatywy a'. Aby funkcję społecznego dobrobytu uznać za sprawiedliwą metodę podejmowania zbiorowych decyzji, wymaga się, by spełniała szereg warunków.

Postulat *niezależności od alternatyw niezwiązanych* głosi, że decyzja w sprawie alternatyw a i a' nie powinna zależeć od preferencji wyborców wobec pozostałych kwestii.

*Université Paris Diderot



Niezależność od alternatyw niezwiązanych. Przypuśćmy, że podejmując decyzję przy zastosowaniu funkcji f, grupa uznała alternatywę a za lepszą od alternatywy a', czyli $a > a'$. Następnie niektórzy członkowie grupy zmienili zdanie w sprawie pewnych alternatyw, ale ich preferencje względem alternatyw a i a' pozostały takie same, tzn. zależność $a >_i a'$ albo $a' >_i a$ dla każdego wyborcy w_i pozostała bez zmian. Funkcja f spełnia warunek niezależności od alternatyw niezwiązanych, jeśli zawsze w takiej sytuacji, przy kolejnym podejmowaniu decyzji za pomocą funkcji f, grupa w dalszym ciągu uzna alternatywę a za lepszą od alternatywy a'.

Słaby warunek optymalności Pareto wymaga respektowania jednomyślnej preferencji członków grupy.

Słaby warunek optymalności Pareto. Załóżmy, że każdy członek grupy przedkłada alternatywę a nad alternatywę a', tzn. $a >_i a'$ dla każdego wyborcy w_i. Powiemy, że funkcja społecznego dobrobytu f spełnia słaby warunek optymalności Pareto, jeśli zawsze w takiej sytuacji zbiorowe uporządkowanie, będące wynikiem zastosowania funkcji f, spełnia $a > a'$.

Nietrudno przyznać, że sformułowane powyżej postulaty stanowią rozsądne minimum, konieczne, by uznać funkcję f za sprawiedliwą.

Badaniem tego typu warunków oraz analizą własności metod podejmowania grupowych decyzji zajmuje się *teoria wyboru społecznego*. Jej narodziny w latach 50. XX wieku wiązały się z odkryciem serii paradoksów mówiących o tym, że rozsądne, wydawałoby się, warunki, są w praktyce nie do pogodzenia. Bodajże najbardziej znanym tego typu wynikiem jest *twierdzenie Arrowa o niemożliwości*, pochodzące od amerykańskiego ekonomisty Kennetha Arrowa.

Twierdzenie Arrowa o niemożliwości. Jeśli zbiór alternatyw ma co najmniej trzy elementy, to każda funkcja społecznego dobrobytu, spełniająca słaby warunek optymalności Pareto oraz warunek niezależności od alternatyw niezwiązanych, jest dyktaturą.

Przez *dyktaturę* rozumiemy funkcję społecznego dobrobytu f, dla której istnieje taki wyborca w_i, że dla każdej pary alternatyw a i a', jeśli $a >_i a'$, to przy podejmowaniu decyzji za pomocą funkcji f grupa uzna alternatywę a za lepszą od alternatywy a'. Dyktatura spełnia wprawdzie oba sformułowane przez nas wymagania, trudno jednak uznać ją za dobrą metodę podejmowania zbiorowych decyzji. Twierdzenie Arrowa mówi więc w istocie o nieistnieniu funkcji społecznego dobrobytu spełniającej minimalne wymagania sprawiedliwości.

Pozostaje nam udowodnić twierdzenie Arrowa. Przypuśćmy, że grupa $n \geqslant 2$ osób podejmuje decyzję w sprawie $k \geqslant 3$ alternatyw przy zastosowaniu funkcji społecznego dobrobytu f spełniającej słaby warunek optymalności Pareto oraz warunek niezależności od alternatyw niezwiązanych. Dla ułatwienia przyjmijmy dodatkowo, że funkcja f jest *neutralna*. Oznacza to, że każda z alternatyw traktowana jest tak samo. Dokładniej, jeśli każdy wyborca zamieni w swoim uporządkowaniu pewne dwie alternatywy a i a' miejscami, to w grupowym uporządkowaniu, będącym wynikiem zastosowania funkcji f, alternatywy a i a' również zamienią się miejscami. Założenie to nie jest konieczne, ale uprości nieco dowód przy jednoczesnym zachowaniu jego kluczowych idei.

Grupę wyborców P nazwiemy *decyzyjną w kwestii* $a > a'$, jeśli jest ona w stanie przeforsować decyzję o uznaniu alternatywy a za lepszą od a', tzn. jeśli każda z osób w grupie P przedkłada alternatywę a nad a', natomiast wszyscy pozostali wyborcy przedkładają alternatywę a' nad a, to grupową decyzją przy zastosowaniu funkcji f jest $a > a'$. Z neutralności funkcji f wynika, że jeśli grupa P jest decyzyjna w kwestii $a > a'$, to jest ona decyzyjna w kwestii dowolnej innej pary alternatyw. Możemy ją więc nazwać po prostu grupą *decyzyjną*.

Przez $\mathcal{D}$ oznaczmy zbiór wszystkich grup decyzyjnych. Ponieważ funkcja f spełnia słaby warunek optymalności Pareto, zbiór wszystkich wyborców W jest decyzyjny, czyli należy do $\mathcal{D}$.

Rozwiązanie zadania M 1543.
Jeżeli $9n + 16 = k^2$ oraz $16n + 9 = \ell^2$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych k, ℓ, to

$$(4k - 3\ell)(4k + 3\ell) = 16k^2 - 9\ell^2 = \\ = 16^2 - 9^2 = 175.$$

Liczba 175 ma trzy przedstawienia w postaci iloczynu dwóch dodatnich liczb całkowitych:

$$1 \cdot 175 = 5 \cdot 35 = 7 \cdot 25,$$

co wobec $4k - 3\ell < 4k + 3\ell$ prowadzi do par (k, ℓ): $(22, 29)$, $(5, 5)$, $(4, 3)$ i w konsekwencji do $n = 52$, $n = 1$ lub $n = 0$. Bezpośrednio sprawdzamy, że każda z tych liczb ma żądaną własność.

Rozważmy teraz dowolną grupę wyborców P. Przypuśćmy, że wyborcy w tej grupie przedkładają alternatywę a nad a', zaś wyborcy spoza tej grupy przedkładają alternatywę a' nad a. Mamy dwie możliwości. Jeśli wspólną decyzją w tej sytuacji jest $a > a'$, to znaczy, że grupa P jest decyzyjna w kwestii $a > a'$, czyli po prostu decyzyjna. Jeśli wspólną decyzją jest $a' > a$, to decyzyjna jest grupa $W \setminus P$ (wyborcy należący do W i nienależący do P). A zatem dokładnie jedna spośród grup P oraz $W \setminus P$ należy do zbioru $\mathcal{D}$.

Jeśli P i Q są grupami wyborców, to przez $P \cap Q$ oznaczamy zbiór wszystkich tych osób, które należą zarówno do P, jak i do Q. Okazuje się, że jeśli grupy P i Q są decyzyjne, to grupa $P \cap Q$ również. Rzeczywiście, rozważmy alternatywy a oraz b i przypuśćmy, że wyborcy w grupie $P \cap Q$ uważają alternatywę a za lepszą od b, natomiast wszyscy pozostali wyborcy mają przeciwne zdanie. Wykażemy, że zbiorowe uporządkowanie, będące wynikiem zastosowania funkcji f, spełnia $a > b$. Niech c będzie alternatywą inną niż a i b (alternatywa taka istnieje, ponieważ zbiór A ma co najmniej trzy elementy). Z warunku niezależności od alternatyw niezwiązanych wynika, że preferencje członków grupy wobec alternatywy c nie wpływają na grupową decyzję w kwestii alternatyw a i b. Możemy więc założyć, że każdy wyborca w grupie $P \setminus Q$ ma preferencję $b >_i a >_i c$; każdy wyborca w grupie $Q \setminus P$ uważa, iż $c >_i b >_i a$; każdy wyborca w grupie $P \cap Q$ jest zdania, że $a >_i c >_i b$; zaś wyborcy spoza grup P i Q uznają porządek $b >_i c >_i a$. Uporządkowania pozostałych alternatyw przyjmijmy dowolne. W wyniku zastosowania funkcji f otrzymujemy grupowe uporządkowanie alternatyw od najlepszej do najgorszej. Decyzyjność grupy P implikuje, że w tym uporządkowaniu $a > c$, zaś decyzyjność grupy Q implikuje, że $c > b$. Oznacza to, że grupa uznaje alternatywę a za lepszą od b, co kończy dowód decyzyjności grupy $P \cap Q$.

Rozwiązanie zadania M 1544.
Mnożąc daną równość stronami przez $a + b + c$, uzyskujemy

$$\frac{a^2 + a(b+c)}{b+c} + \frac{b^2 + b(c+a)}{c+a} + \\ + \frac{c^2 + c(a+b)}{a+b} = a + b + c,$$

skąd

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0.$$

Podsumowując, wykazaliśmy powyżej trzy własności zbioru grup decyzyjnych $\mathcal{D}$: 1) grupa wszystkich wyborców W należy do $\mathcal{D}$, 2) dla każdej grupy wyborców P dokładnie jedna spośród grup P oraz $W \setminus P$ należy do $\mathcal{D}$, 3) dla każdych dwóch grup P i Q, należących do $\mathcal{D}$, grupa $P \cap Q$ należy do $\mathcal{D}$. Zbiór spełniający te trzy warunki jest *ultrafiltrem* podzbiorów zbioru W.

Ostatnim krokiem w dowodzie jest wykazanie, że istnieje taki wyborca w_i, iż grupa jest decyzyjna wtedy i tylko wtedy, gdy w_i jest jej członkiem.

Niech P będzie grupą osób, które należą do każdej grupy decyzyjnej. Z warunku 3) wynika, że grupa P jest decyzyjna. Wobec tego grupa P nie może być pusta – grupa wszystkich wyborców jest decyzyjna, a zatem warunek 2) implikuje, że grupa pusta nie jest decyzyjna. Niech wyborca w_i należy do grupy P. Członkowie grupy P z definicji należą do każdej grupy decyzyjnej, czyli w szczególności wyborca w_i należy do każdej grupy decyzyjnej. Z drugiej strony, jeśli Q jest dowolną grupą, której w_i jest członkiem, to grupa $W \setminus Q$ nie jest decyzyjna, gdyż w_i do niej nie należy. Z warunku 2) wnioskujemy więc, że grupa Q jest decyzyjna.

Rozwiązanie zadania M 1545.
Bez straty ogólności przyjmijmy, że

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

Zauważmy, że w każdej z par

$$(1, a_i - 1),\ (2, a_i - 2),\ \ldots,\ (\lfloor a_i/2 \rfloor, \lceil a_i/2 \rceil)$$

jest co najmniej jedna liczba spoza zbioru $\mathcal{S}$. Rzeczywiście, gdyby w pewnej parze obie liczby należały do $\mathcal{S}$, to ich suma także, co przeczy definicji a_i.
Z drugiej strony liczb spoza $\mathcal{S}$, które są mniejsze od a_i, jest dokładnie $i - 1$. Stąd $\lfloor a_i/2 \rfloor \leqslant i - 1$, a zatem $a_i \leqslant 2i - 1$. Sumując te nierówności dla $i = 1, 2, \ldots, n$, uzyskujemy

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant 1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = \\ = n^2.$$

Wyborca w_i jest dyktatorem – jeśli przedkłada on alternatywę a nad alternatywę a', to grupa Q osób będących tego samego zdania jest decyzyjna, a zatem przeforsuje ona zbiorową decyzję $a > a'$. To kończy dowód twierdzenia Arrowa.

Wykazaliśmy, że funkcja społecznego dobrobytu niebędąca dyktaturą nie może jednocześnie spełniać słabego warunku optymalności Pareto oraz warunku niezależności od alternatyw niezwiązanych. To i inne tego typu paradoksalne twierdzenia teorii wyboru społecznego sprawiają, że projektowanie grupowych metod podejmowania decyzji jest bardzo skomplikowane. Nieunikniona jest rezygnacja z pewnych pożądanych własności. Spośród postulatów, o których mówi twierdzenie Arrowa, najczęściej porzuca się niezależność od alternatyw niezwiązanych. W praktyce oznacza to, że aby uzyskać bardziej pożądany wynik, czasem opłaca się deklarować preferencje inne niż rzeczywiste. Wybory są więc z konieczności zawsze nie do końca sprawiedliwe.