

Strategie graczy w grze dynamicznej to funkcje $S_i(t, x)$. W czasie t gracz wylowi $S_i(t, X(t))$.

Stan łowiska opisuje równanie $X(t+1) = f(X(t), S(t, X(t)))$ ze stanem początkowym $X(0) = x_0$.

Wyplata gracza i jest postaci

$$P_i(S) = \sum_{t=0}^T P_i(S(t, X(t))) \delta^t.$$

Horyzont czasowy T może być skończony bądź nie.

Można też rozważać analogiczne gry z czasem ciągłym (robi się to nawet częściej niż z czasem dyskretnym). Gry dynamiczne są znacznie bardziej złożone od zwykłych – wiele problemów jest ciągle otwartych, w tym wiele zagadnień związanych z obliczaniem równowag Nasha.

Równowagę Nasha obliczamy, poczynając od końca, analizując wyplata w tym okresie. W czasie 1 przy stanie ε wyplaty graczy są zerowe, przy dowolnym innym stanie najlepsza odpowiedź gracza na decyzje pozostałych graczy to 2, a wyplata to 4. Następnie cofamy się w czasie do okresu 0 i maksymalizujemy po decyzji w chwili 0 obecną wyplata gracza plus obliczoną wcześniej zdyskontowaną wyplata przyszłą. Analiza przypadków daje najlepszą odpowiedź $S_i(0, x_0) = 2$; przypadki, w których decyzje pozostałych graczy sumują się do 6 lub 7, analizujemy osobno – ze względu na „klamerkową” funkcję wyplaty w przyszłym okresie. Metoda ta, w ogólnym przypadku bazująca na indukcji wstecznej, nazywana jest programowaniem dynamicznym albo metodą Bellmana.

Pierwsze modele gier dynamicznych opisujących eksploatację środowiska były zainspirowane wspomnianymi *wojnami dorszowymi*, które zakończyły się wydzieleniem 200-milowej wyłącznej strefy ekonomicznej Islandii, co dziś jest już standardem gwarantowanym prawem międzynarodowym. Warto jednak zauważyć, że taka „prywatyzacja” łowisk nie rozwiązuje w całości problemu, ponieważ formalne granice stref ekonomicznych są ignorowane przez ryby, które mogą przepływać tam, gdzie jest ich mniejsze zagęszczenie, a więc więcej pokarmu. Powoduje to, że każdemu z krajów oplaca się do pewnego poziomu zwiększać eksploatację w swojej strefie, zwłaszcza

Gry dynamiczne. Czego brakuje w tej analizie? Każdego dnia gracze mogą rozpocząć kolejną taką samą prostą grę. Być może dobrze opisywałaby ona rybołówstwo morskie w średniowieczu, ale nie przy obecnych możliwościach technicznych – nadmiernie poławianych ryb będzie coraz mniej, a w skrajnym przypadku mogą nawet wyginąć. Przyczyną *wojen dorszowych* było właśnie istotne zmniejszenie populacji łowisk.

Do pełniejszego opisu zjawiska potrzebujemy kolejnych punktów w czasie i nowej zmiennej – *zmiennej stanu*, oznaczającej liczbę lub biomasa ryb w łowisku. Strategie graczy opisują, co gracz zrobi w każdym momencie gry, ewentualnie w zależności od stanu łowiska. Gracze biorą pod uwagę nie tylko bieżącą wyplata, ale całkowity zysk (również przyszły) przy uwzględnieniu, że jedna złotówka zarobiona w przyszłości może mieć inną wartość – tzw. dyskonto.

Przykład 2. O ile pięciu rybaków z Jastarni nie może zagrozić populacji bałtyckiego śledzia, to pięć nadbałtyckich krajów już tak. Teraz graczami są kraje, a gra z przykładu 1 (oczywiście z nieco innymi jednostkami) toczy się przez dwa okresy, czynnikiem dyskontowym jest $\delta = \frac{1}{2}$. Jeśli łączna eksploatacja przekroczy 5, stan populacji ryb zmniejsza się z $x_0 = 1$ (populacja w niskim, ale stabilnym stanie) do $\frac{1}{2}$ (populacja mocno przetrzebiona), a jeśli natomiast łączna eksploatacja przekroczy 7, to stan zmniejsza się do pewnego małego $\varepsilon > 0$ (populacja na skraju wyginęcia). Przy stanie x każdy statek może złowić maksymalnie $2x$ jednostek ryb, ponadto koszty rosną $\frac{1}{x}$ razy. Przyjmujemy ε na tyle małe, że w tym stanie połowy stają się nieopłacalne. W tej grze, podobnie jak w przykładzie 1, w jedynej równowadze Nasha gracze łowią z maksymalną intensywnością w okresie początkowym, doprowadzając populację śledzia na skraj wyginęcia, mimo że oznacza to dla nich głodowanie w okresie 1. Wyplata każdego z graczy jest równa 4, podczas gdy w razie porozumienia każdy mógłby mieć 10,5.

W grach dynamicznych eksploatacji zasobów można stosować te same metody 1–3 wymuszania kooperacji, możliwe są też inne, specyficzne metody oparte na fakcie wielokrotnego wchodzenia w interakcję (np. porozumienia międzynarodowe, w których jedyną sankcją za wyłamanie się gracza z kooperacji jest groźba zerwania porozumienia i powrót do nieopłacalnej dla wszystkich równowagi Nasha).

jeśli pozostali postanowili ograniczyć eksploatację w swoich. Zagadnienie to staje się znacznie bardziej złożone, bo już sam fakt istnienia specjalnych stref ekonomicznych wymaga użycia wielowymiarowej zmiennej stanu i wzięcia pod uwagę opóźnienia, ponadto w morzach mamy więcej niż jeden gatunek ryb, a na szybkość rozmnażania się oprócz biomasy ma wpływ struktura wiekowa populacji... Widać więc, że nawet liczenie jedynie równowag Nasha w grach eksploatacji zasobów morskich, nie wspominając nawet o konstrukcji porozumień międzynarodowych, dzięki którym uda się wymusić kooperację, oznacza zajęcie dla matematyków na długie lata.

Co ma wspólnego bryła Wulffa z płatkami śniegu?

Piotr RYBKA*

*Zakład Równań Fizyki Matematycznej, IMSM, WMIM, Uniwersytet Warszawski

Drogi Czytelniku, jeśli popatrzyś na płatki śniegu, to zobaczysz wielką ich różnorodność. Bogactwo znanych kolekcji zdjęć śnieżynek mówi nam, że nie ma dwóch identycznych płatków śniegu. Możesz zapytać, czy możemy skatalogować pokrój kryształków lodu i wyjaśnić ich kształt?

Ukichiro Nakaya żył w latach 1900–1962; znany jest z tego, że stworzył pierwszy sztuczny płatek śniegu.

Klasyfikacji służy diagram, którego autorem jest Ukichiro Nakaya, opisujący pokrój kryształka w zależności od dostępności pary wodnej i temperatury otoczenia. Próba wyjaśnienia tego pokroju odwołuje się do pojęcia energii

W przybliżeniu możemy uznać, że płatki śniegu mają symetrię sześciokąta foremnego.

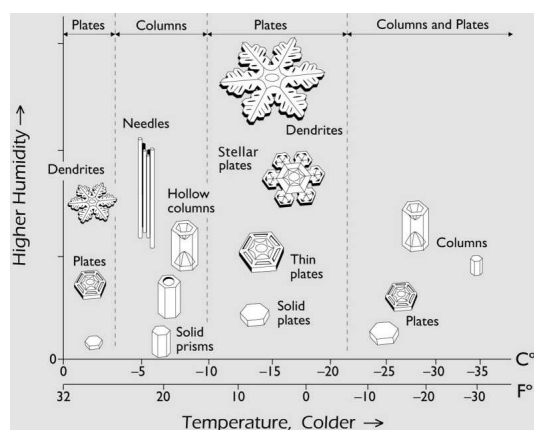


Diagram Nakai

Georg Wulff był bardzo ciekawą postacią. Żył w latach 1863–1925. W roku 1898 został kierownikiem katedry na Uniwersytecie Warszawskim.

[1] G. Wulff, *Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Krystallflächen*, Zeitschrift f. Krystall. Mineral. **34**, (1901), 449–530.

powierzchniowej. Gdy oglądamy śnieżynkę ze środka jej symetrii, to widzimy, że nie we wszystkich kierunkach rośnie ona z taką samą prędkością. Innymi słowy, energia konieczna do zbudowania jednego metra kwadratowego powierzchni kryształka (lub metra bieżącego, jeśli mówimy o całkowicie płaskich śnieżynkach) zależy od kierunku \mathbf{n} . Tę energię będziemy oznaczali symbolem $\varphi(\mathbf{n})$.

Ograniczmy się tylko do płaskich śnieżynek. Możemy wtedy zapytać, czy znajomość gęstości energii powierzchniowej, φ , wystarcza do odtworzenia równowagowego kształtu śnieżynki. W uproszczeniu powiemy, że jest to stan, którego śnieżynka nie będzie chciała zmienić przy ustalonej wilgotności powietrza. Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. Georg Wulff podał geometryczną konstrukcję bryły równowagowej, W_φ , nazywanej obecnie bryłą Wulffa. Konstrukcja została zamieszczona w pracy z początku XX wieku [1].

Do konstrukcji bryły Wulffa potrzebna jest, znana już nam, funkcja gęstości energii zależąca od kąta θ , jaki tworzy wektor jednostkowy \mathbf{n} z osią OX . Ścisła definicja jest następująca,

$$W_\varphi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) \leq \varphi(\theta), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

Geometrycznie rzecz ujmując, postępujemy następująco: w każdym punkcie \mathbf{z} należącym do wykresu biegunowego funkcji φ prowadzimy prostą prostopadłą do promienia. Wtedy bryła Wulffa składa się z punktów, które mogą być osiągnięte, gdy startujemy z początku układu współrzędnych, bez przekraczania żadnej z tych linii.

Konstrukcja Wulffa prowadzi do wypukłego zbioru W_φ , niezależnie od właściwości φ . Okazuje się, że W_φ jest kulą jednostkową w metryce powiązanej z φ .

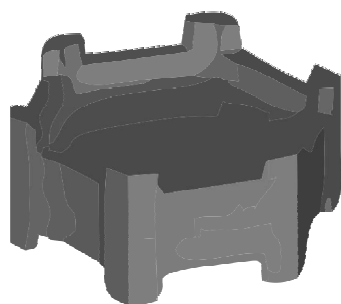
Kształt śnieżynki, wypuszczającej coraz to nowe gałęzie, wyraźnie wskazuje, że ma ona tendencję wzrostową. Nie ma ona kształtu równowagowego. Możesz zatem, Czytelniku, dociekać, jak te widoczne kształty uzyskać. Są dwie odpowiedzi na to pytanie: doświadczalna i teoretyczna.

Okazuje się, że używany obecnie zestaw doświadczalny do hodowania w domu płatków śniegu jest bardzo prosty i zasadniczo składa się ze styropianowej skrzyni, w której przechowujemy suchy lód, czyli zestalony dwutlenek węgla, plastikowej butelki po napojach, nitki i pyłu np. z dymu papierosowego. Po raz pierwszy płatki śniegu zostały wyhodowane w Japonii na zasypanej zimą śniegiem wyspie Hokkaido przez wspomnianego Nakayę w roku 1936.

Podejście teoretyczne wykorzystuje matematyczny opis procesu krystalizacji, który fachowo nazywa się jednofazowym zmodyfikowanym zagadnieniem Stefana z kinetycznym przechłodzeniem. Jest to bilans masy i energii zapisany za pomocą równań różniczkowych cząstkowych. Z uwagi na to, że wspomniany opis jest skomplikowany, pominiemy go całkowicie. Podkreślimy natomiast jedną ważną rzecz, że w skład tego opisu wchodzi człon opisujący krzywiznę krzywej będącej brzegiem śnieżynki. Ów człon jest zgodny z geometrią, w której bryła Wulffa jest kulą jednostkową.

Wspomniany opis można doprowadzić do postaci dyskretnej, takiej, z którą poradzi sobie komputer. Tę pracę wykonali John Barrett, Harald Garcke i Robert Nürnberg. Ich sukces polega na tym, że odpowiednio dobierając parametry fizyczne, zdołali odtworzyć kształty spotykane w naturze. Niektóre z nich są naprawdę zaskakujące.

Morał z tej opowieści jest taki, że fizyka wspólnie z matematyką, wspomaganie komputerami, są zdolne całkiem dokładnie opisywać rzeczywistość. Naukowcy robią to nie tylko z ciekawości, ale i po to, aby nauczyć się sterować procesami przemysłowymi w optymalny sposób. Dziś naukowcy z Uniwersytetu Warszawskiego kontynuują dzieło rozpoczęte ponad sto lat temu przez Wulffa, zajmując się różnymi aspektami opisywanych wyżej procesów.



Bryła z poniższej pracy Barretta, Garckego, Nürnberga

[2] J.W. Barrett, H. Garcke, R.Nürnberg, *Finite Element Approximation of One-Sided Stefan Problems with Anisotropic, Approximately Crystalline, Gibbs–Thomson Law*, Adv. Differential Equations **18** (2013), no. 3–4, 383–432