

# Opcje i greckie parametry

Piotr KOWALCZYK\*, Andrzej PALCZEWSKI\*\*

\*Zakład Matematyki Finansowej  
 \*\*Zakład Równań Fizyki Matematycznej,  
 IMSM, WMIM, Uniwersytet  
 Warszawski

Opcji używano od bardzo dawna w kontaktach handlowych. Trudno jest ustalić od jak dawna, ponieważ były to formy dwustronnych umów, po których nie pozostawały trwałe ślady. Wiadomo, że były one znane już w średniowieczu, a w wieku XIX handlowano nimi w niemal wszystkich krajach europejskich oraz Stanach Zjednoczonych.

Na początku lat 2000. odkryto, że bardzo podobny wzór do wzoru Blacka-Scholesa wyprowadził już w 1908 roku Vinzenz Bronzin. Wyniki jego badań, opublikowane w niewielkiej książeczce, zostały jednak całkowicie zapomniane po I wojnie światowej.

Wzór na cenę opcji kupna (opcji pozwalającej kupić towar po ustalonej cenie  $K$  w momencie  $T$ ) ma postać

$$(*) \quad \mathbb{E} \left[ \exp(-rT) \max(S(T) - K, 0) \right].$$

Investowanie w opcje może być niezwykle opłacalne, ponieważ opcje są zwykle tanie, a mogą przynosić duży zysk w momencie realizacji. Jednak jeśli jedna strona dużo zarabia, to druga dużo traci. Oznacza to, że inwestowanie w opcje jest bardzo ryzykowne. Duże instytucje finansowe nie chcą ponosić takiego ryzyka, zmniejszają je przez odpowiednie inwestowanie w opcje oraz instrument, na który opcja jest wystawiona (instrument bazowy). Jakie powinny być proporcje takiej inwestycji, wskazują właśnie greckie parametry.

Opcje są kontraktami, które posiadaczowi dają prawo (ale nie obowiązek) zakupu (lub sprzedaży) określonego towaru w ustalonej chwili w przyszłości (termin realizacji) po ustalonej cenie (cena realizacji). Opcja jest więc umową, która jednej stronie (posiadaczowi) daje pewne prawa, które muszą być realizowane przez drugą stronę umowy (sprzedawcę opcji). Oczywiście, za uzyskane prawa posiadacz opcji musi zapłacić sprzedawcy określoną cenę.

Zasadniczym problemem przy kontraktach opcyjnych jest właściwa wycena takiego kontraktu. Przy braku odpowiedniego aparatu matematycznego robiono to intuicyjnie, co często prowadziło do znacznych błędów. Dopiero pod koniec XIX wieku zaczęto rozumieć czynniki, które wpływają na cenę opcji. Ważnym krokiem była praca L. Bacheliera z 1900 roku, w której ceny towaru, na który wystawiana jest opcja, były modelowane procesami stochastycznymi. Jednak dopiero w zaproponowanym w 1973 roku modelu F. Blacka i M. Scholesa znaleziono poprawny sposób wyceny opcji.

Model Blacka-Scholesa pozwala w postaci analitycznego wzoru zapisać cenę towaru, na który wystawiana jest opcja:  $S(t) = S_0 \exp((r - \sigma^2/2)t + \sigma W(t))$ . We wzorze tym za losowe zachowanie cen odpowiada proces Wienera  $W(t)$ .  $S_0$  jest ceną w chwili  $t = 0$ , parametr  $r$  opisuje obowiązującą na rynku stopę procentową, a  $\sigma$  jest „zmiennością” ceny (duże  $\sigma$  odpowiada dużym fluktuacjom ceny). Kiedy znana jest cena towaru (instrumentu bazowego), to korzystając z odpowiedniego aparatu matematycznego, można obliczyć cenę opcji.

Na współczesnym rynku finansowym interesuje nas nie tylko cena opcji  $V$ , ale także tzw. greckie parametry, które są niczym innym jak pochodnymi ceny opcji po zmiennych, od których ta cena zależy. Mamy więc parametry:  $Delta = \partial V / \partial S_0$ ,  $Gamma = \partial^2 V / \partial S_0^2$ ,  $Theta = -\partial V / \partial T$  oraz kilka innych. Greckie parametry pełnią ważną funkcję na rynku finansowym, ponieważ są one wykorzystywane do zmniejszania ryzyka inwestycji w opcje.

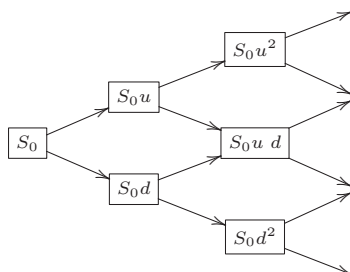
Analityczny wzór na cenę instrumentu bazowego można wyprowadzić tylko dla bardzo uproszczonego modelu rynku. Podany wyżej wzór zakładał, że  $r$  i  $\sigma$  są stałe. Mając taki wzór, można wyprowadzić także analityczny wzór na cenę opcji oraz greckie parametry. Modele takie są jednak zbyt uproszczonymi modelami rzeczywistego rynku. W bardziej zaawansowanych modelach przyjmuje się, że zmienność  $\sigma$  jest funkcją ceny instrumentu bazowego  $S(t)$ . W takich modelach nie daje się już zwykle wyprowadzić wzoru na cenę instrumentu bazowego. Wtedy do wyceny opcji oraz obliczenia jej greckich parametrów musimy wykorzystać metody numeryczne.

Jednym z najprostszych numerycznych algorytmów obliczania cen opcji jest algorytm drzewa dwumianowego. W modelu dwumianowym czas  $T$  do zapadalności opcji dzielimy na  $N$  okresów o długości  $\tau = T/N$ . Drzewo dwumianowe konstruowane jest dla momentów czasu  $n\tau$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Jeśli  $S_n$  oznacza cenę instrumentu bazowego w węźle  $n$ , to cena w węźle  $n + 1$  dana jest wzorem  $S_{n+1} = S_n Z_n$ , gdzie  $Z_n$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie dwupunktowym

$$Z_n = \begin{cases} u, & \text{z prawdopodobieństwem } p, \\ d, & \text{z prawdopodobieństwem } 1 - p, \end{cases}$$

a  $u$ ,  $d$  i  $p$  są dane, przy czym  $d < u$ .

Ponieważ  $S_0$  jest znane, otrzymujemy drzewo dwumianowe pokazane na rysunku 1. Aby obliczyć na tym drzewie cenę opcji, należy prawdopodobieństwo  $p$  w definicji zmiennej  $Z_n$  zamienić na  $p^* = \frac{e^{r\tau} - d}{u - d}$ , które jest prawdopodobieństwem neutralnym względem ryzyka. Mając wyznaczone prawdopodobieństwo  $p^*$ , można szybko obliczyć cenę opcji. Dla opcji kupna z ceną  $K$  i terminem zapadalności  $T$  cena ta liczona jest „wstecz” na drzewie dwumianowym. Zauważmy w tym celu, że ceny instrumentu bazowego w węzłach odpowiadających czasowi zapadalności  $T$  mają postać  $S_{jN} = S_0 u^j d^{N-j}$ . Niech  $V_{jN} = \max(S_{jN} - K, 0)$ ,  $j = 0, \dots, N$ . Wtedy,



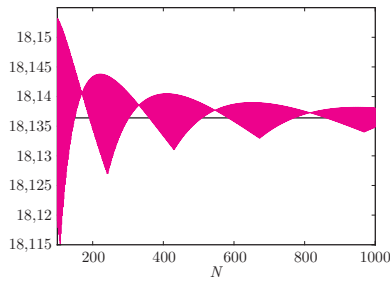
Rys. 1. Drzewo dwumianowe

Prawdopodobieństwo neutralne względem ryzyka ma tę własność, że zdyskontowane ceny instrumentu bazowego tworzą martyngał względem tego prawdopodobieństwa.

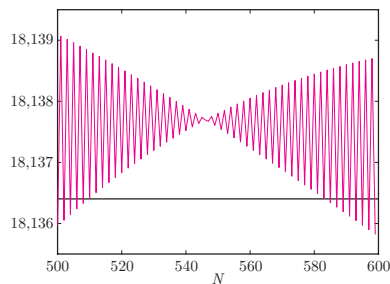
cofając się po węzłach drzewa od węzła  $N$  do węzła 0, korzystamy ze wzoru

$$V_{j,i} = e^{-r\tau} (p^* V_{j+1,i+1} + (1-p^*) V_{j,i+1}).$$

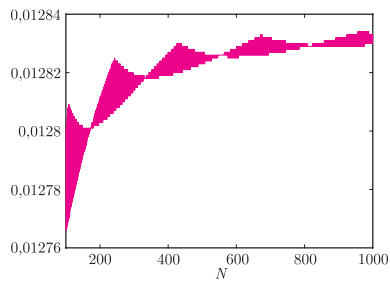
Obliczona z tego algorytmu wartość  $V_{0,0}$  jest poszukiwaną ceną opcji.



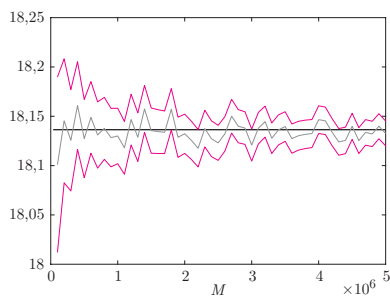
Rys. 2. Cena opcji – drzewo dwumianowe



Rys. 2a. Cena opcji – drzewo dwumianowe



Rys. 3. Wartość parametru  $\Gamma$  – drzewo dwumianowe



Rys. 4. Cena opcji – metoda Monte Carlo

Aby zilustrować działanie algorytmu drzewa dwumianowego, rozważmy model zwany modelem CEV, w którym  $\sigma(S(t)) = \sigma_0 S(t)^{\beta-1}$ , gdzie  $\sigma_0$  jest stałą. W modelu tym nie można wyprowadzić analitycznego wzoru na  $S(t)$ , ale można wyprowadzić analityczny wzór na gęstość tego procesu. Niestety, wzór ten zawiera skomplikowaną całkę, którą należy obliczać numerycznie. Prostsze jest bezpośrednio numeryczne obliczenie ceny opcji. Konstrukcja drzewa dwumianowego wymaga ustalenia wartości  $d$ ,  $u$  oraz  $p$ . Obliczamy je z danych uzyskanych z obserwacji zachowania się cen instrumentu bazowego na rzeczywistym rynku. W modelu CEV wzory są nieco bardziej skomplikowane niż w modelu Blacka–Scholesa i podobnie jak dla tego ostatniego modelu nie będziemy ich tutaj przedstawiali. Kiedy znamy już wartości  $d$ ,  $u$  i  $p$ , to obliczenie ceny opcji (oraz jej greckich parametrów) wymaga ustalenia właściwej liczby węzłów  $N$ . Pozornie zadanie wydaje się łatwe – należy wybrać wielkość  $N$  tak, aby uzyskać cenę opcji z wymaganą dokładnością. Zobaczmy, jak wygląda cena opcji w modelu CEV dla różnej liczby węzłów  $N$  (patrz rys. 2).

Obraz na rysunku 2 jest dość zaskakujący. Spodziewaliśmy się obrazu krzywej, która każdej wartości  $N$  przypisuje cenę opcji. Tymczasem dostaliśmy jakieś „dziwne precle”. Dla zrozumienia, co naprawdę pokazuje rysunek 2, powiększmy jego fragment. Ten powiększony fragment jest pokazany na rysunku 2a (pozioma linia na obu rysunkach to dokładna cena opcji, którą otrzymaliśmy, obliczając numerycznie wspomnianą wcześniej całkę opisującą gęstość procesu  $S(T)$ ). Teraz już widać, że dostaliśmy wykres, który każdej wartości  $N$  przypisuje jedną cenę opcji. Problem polega na tym, że ten wykres oscyluje między skrajnymi wartościami (obwiedniami). Podobnie wygląda obliczenie greckich parametrów. Rysunek 3 pokazuje wyniki obliczenia jednego z tych parametrów ( $\Gamma$ ). Widać z tych rysunków, że obliczenie ceny opcji albo jej greckich parametrów dla jednej wartości  $N$  daje nam mało precyzyjną informację (nie wiemy, w jakim fragmencie oscylującej krzywej wylądowaliśmy). Optymistyczna informacja, jaka wynika z rysunków 2 i 3, jest taka, że przy wzroście  $N$  oscylacje mają zmniejszającą się amplitudę. Jeśli więc dokonamy obliczeń dla wielu wartości  $N$ , to będziemy znali położenie górnej i dolnej obwiedni oscylacji. Będziemy mogli wtedy wybrać takie  $N$ , dla którego amplituda oscylacji będzie mniejsza niż oczekiwana dokładność obliczenia ceny opcji albo jej greckich parametrów.

Czytelnik mógłby pomyśleć, że otrzymane na rysunkach 2 i 3 oscylacje to cecha użytej metody numerycznej, a inne metody będą dawały wyniki pozbawione takich mankamentów. Spróbujmy więc obliczyć cenę opcji, wykorzystując metodę Monte Carlo. W metodzie tej dokonując losowań z odpowiedniego rozkładu, możemy symulować trajektorie procesu  $S(t)$  i wyznaczyć wartości końcowe  $S(T)$  na każdej trajektorii. Symulując dostatecznie dużo trajektorii, możemy wartość oczekiwaną w podanym na marginesie wzorze (\*) na cenę opcji zastąpić średnią po trajektoriach (pozwala na to prawo wielkich liczb). Prócz obliczenia średniej możemy także obliczyć średni błąd, który jest dobrym przybliżeniem wariancji zmiennej losowej  $S(T)$  i pozwala wyznaczyć przedział ufności dla średniej. Wyniki takich obliczeń dla bardzo dużej liczby symulacji (do  $5 \cdot 10^6$ ) pokazane są na rysunku 4. Zaznaczono na tym rysunku średnią oraz górną i dolną granicę przedziału ufności dla poziomu ufności 95% (to oznacza, że z prawdopodobieństwem 0,95 poprawny wynik leży w tym przedziale). Niestety, także dla metody Monte Carlo dostaliśmy oscylujący wykres. Oscylacje są, oczywiście, mniej gwałtowne niż dla drzewa dwumianowego. Ale to jest częściowo spowodowane faktem, że obliczenia robiliśmy dla kolejnych wartości  $M$  oddalonych od siebie. Gdyby obliczenia na drzewie dwumianowym robić dla oddalonych od siebie wartości  $N$ , to obraz byłby podobny jak na rysunku 4.

Dokładna wycena instrumentów finansowych nie jest więc sprawą prostą. Nawet jeśli wiemy, jakie pułapki na nas czyhają, musimy wykonać wiele obliczeń (dla różnych wartości  $N$  lub  $M$ ), aby oszacować błąd otrzymanego rozwiązania. Wiedza, czyli znajomość pułapek, może nas jednak ustrzec przed wyciągnięciem zbyt optymistycznych wniosków z wyników uzyskanych dla małej liczby symulacji.