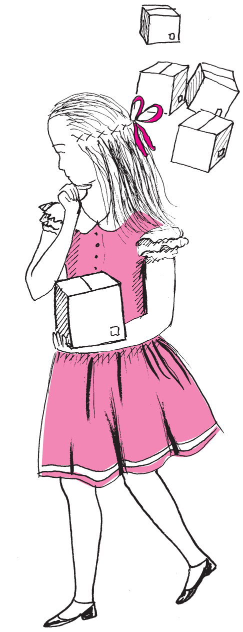
Z życia managera magazynu, czyli jak składać optymalne zamówienia?

*Agnieszka ABRAMCZYK**

*Syncron Poland



Spróbuj, drogi Czytelniku, wyobrazić sobie, że zarządzasz wielkim magazynem z milionami różnych towarów na półkach. W Twoim magazynie znajdują się części zamiennie do koparek, samochodów i motocykli, śrubki, silniki, narzędzia, odzież specjalistyczna, smary i oleje napędowe, oraz inne motoryzacyjne cuda. Jeżeli wczułeś się już w swoją rolę, pozwól, że zadam Ci pytanie. W jaki sposób zarządzasz towarami? Skąd wiesz, kiedy złożyć zamówienie? Czy masz ustalony grafik i zamawiasz na początku każdego miesiąca, mimo tego, że niektóre części piętrzą się aż po sufit? A może zamawiasz dopiero wtedy, gdy zabraknie Ci towaru na półce? A co, jeżeli dostawa trwa dwa miesiące, a przed drzwiami magazynu rozentuzjazmowany tłum harleyowców domaga się nowego modelu skórzanych kurtek? Być może, zamawiasz, gdy ilość towaru jest odpowiednio mała? Ale co to znaczy odpowiednio mała? Czy 5 śrubek to wystarczająco mało? A 5 silników do supernowoczesnego, rzadkiego modelu koparki?

Poszukiwanie odpowiedzi na podobne pytania to codzienność w Syncronie – moim miejscu pracy. Nasz główny produkt jest aplikacją, dzięki której sieć magazynów może zaoszczędzić pieniądze poprzez m.in. minimalizację ilości przechowywanych towarów, optymalizację procesu składania zamówień i efektywne zarządzanie łańcuchem dostaw. W niniejszym artykule opowiem o małym wycinku jednej z funkcjonalności, to znaczy o strategii zamawiania (R, Q). Zasada działania tej strategii jest bardzo prosta – składasz zamówienie o wielkości Q, kiedy zauważysz, że ilość towaru spadnie do poziomu R.

Ile zamawiać?

Teoretyczne opracowania na temat strategii (R, Q) nie określają jasno, ile zamawiać. Ważne jest natomiast, aby wielkość zamówienia nie zmieniała się istotnie w czasie. Przy wyborze odpowiedniego Q możemy kierować się minimalizacją istotnych kosztów, np. kosztów zamawiania (transport, rozładunek) i przechowywania (koszty związane z zamrożeniem kapitału, składowaniem, potencjalnym zniszczeniem towaru). W praktyce precyzyjne oszacowanie poszczególnych kosztów jest skomplikowane, dlatego też w ramach alternatywy możemy zastosować nieco prostszą formułę, $Q = D/N$, gdzie D to oczekiwany roczny popyt, a N to planowana liczba zamówień w roku.

Kiedy zamawiać?

Przyjmijmy na początek, że popyt i czas dostawy są deterministyczne. Przy znanym popycie możemy dokładnie przewidzieć, kiedy sprzedamy wszystko to, co mamy obecnie w magazynie. Ponieważ czas dostawy jest ustalony, możemy złożyć zamówienie odpowiednio wcześniej – na tyle wcześnie, aby dostawa wypadła w dniu, gdy klient kupuje ostatnią sztukę towaru. Formalizując nieco te rozmyślania,

$$R = \text{wielkość popytu w czasie oczekiwania na dostawę.}$$

W rzeczywistości popyt nie jest deterministyczny, dlatego też porzucamy to założenie. Dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że mamy do czynienia ze zmienną losową o rozkładzie normalnym $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, gdzie μ to oczekiwany popyt w czasie oczekiwania na dostawę, a σ to niepewność naszej prognozy. Podobnie jak poprzednio, moglibyśmy złożyć zamówienie w momencie, gdy ilość towaru w magazynie jest równa μ. Zauważmy jednak, że takie postępowanie daje nam tylko 50% szans, że wszyscy klienci zostaną obsłużeni (rozkład normalny jest symetryczny względem średniej). Ta niepewność prognozy sprawia, że powinniśmy mieć dodatkową pulę towaru na „wszelki wypadek”, czyli, innymi słowy, złożyć zamówienie nieco wcześniej. Czy dużo wcześniej? To zależy od poziomu obsługi, który chcemy zapewnić naszym klientom. Pozwólcie, że na moment zboczę nieco z tematu i wtrącę kilka słów o miarach poziomu obsługi, których najczęściej używa się w praktyce.

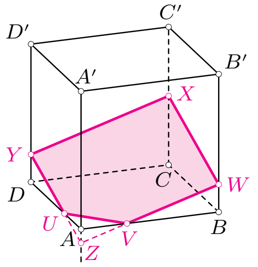
Rozwiązanie zadania M 1528.
Odpowiedź: Na 2^{15} sposobów.
Wyróżnijmy 15 pól tablicy, które tworzą skrajny dolny wiersz i skrajną lewą kolumnę. Zauważmy, że *dowolne* kolorowanie tych pól dwoma kolorami jednoznacznie określa pokolorowanie całej tablicy zgodnie z warunkami zadania — kolory pozostałych pól określamy w kolejności zadanej przez numery na rysunku.

	7	8	9	10	11	12	13
	6	7	8	9	10	11	12
	5	6	7	8	9	10	11
	4	5	6	7	8	9	10
	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7

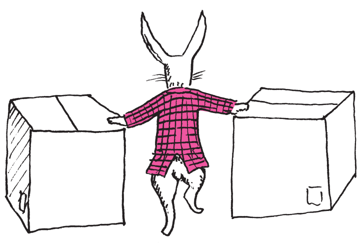
Z drugiej strony każdy sposób pomalowania wszystkich pól tablicy jednoznacznie zadaje kolory pól wyróżnionych. To oznacza, że kolorowania tablicy o zadanych własnościach są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z dowolnymi pokolorowaniami wyróżnionych pól, a takich pokolorowań jest 2^{15}.

Uwaga. Podany przykład zbioru 15 pól jednoznacznie kodującego kolorowanie całej tablicy nie jest jedyny — można zadać pytanie, jak wyglądają zestawy 15 pól o takiej własności i ile ich jest. Czytelnika Lubiącego Utożsamiać Tablice z Grafami Dwudzielnymi (a zbiory pól tablicy z odpowiednimi podgrafami) zachęcamy do udowodnienia, że omawiane zbiory pól to *drzewa rozpinające* takich grafów i jest ich dokładnie 2^{14}.

Rozwiązanie zadania M 1529.
Oznaczmy pewną parę przeciwległych ścian danego sześcianu przez $ABCD$ oraz $A'B'C'D'$ w taki sposób, aby odcinki AA', BB', CC', DD' były krawędziami sześcianu oraz ściana $A'B'C'D'$ nie zawierała żadnego z boków uzyskanego w przekroju pięciokąta, a krawędź AA' — żadnego z jego wierzchołków. Niech ponadto U, V, W, X, Y, Z będą punktami przecięcia płaszczyzny przekroju odpowiednio z prostymi AD, AB, BB', CC', DD', AA'.



Zauważmy, że czworokąt $WXYZ$ jest równoległobokiem, co wynika z równoległości przeciwległych ścian sześcianu. Okrąg wpisany w pięciokąt $UVWXY$ jest wpisany w ten równoległobok, skąd wniosek, że $WXYZ$ jest rombem. Wykażemy, że $AA'C'C$ jest płaszczyzną symetrii tego rombu; ponieważ jest to także płaszczyzna symetrii wyjściowego sześcianu, więc wyniknie stąd, że punkty U i V są względem niej symetryczne, co zakończy rozwiązanie.
Skoro $WXYZ$ jest rombem, to ma prostopadłe przekątne, a zatem punkty W oraz Y są zawarte w płaszczyźnie symetralnej odcinka XZ. Płaszczyzna ta nie pokrywa się z płaszczyzną $BB'D'D$ (punkt Z nie należy do odcinka AA'), więc przecina się z nią wzdłuż prostej prostopadłej do płaszczyzny $AA'C'C$. Wobec tego punkty W i Y są symetryczne względem płaszczyzny $AA'C'C$, a to właśnie należało udowodnić.



- *CSL* (ang. *Cycle Service Level*) – prawdopodobieństwo zaspokojenia całego popytu w okresie pomiędzy dostawami wyrażone w procentach,
- *IFR* (ang. *Item Fill Rate*) – procent zaspokojonego popytu,
- *OFR* (ang. *Order Fill Rate*) – procent zamówień zrealizowanych w całości.

Aby doświadczyć różnicy pomiędzy powyższymi miarami, rozważmy scenariusz, w którym zamówienie o wielkości 99 dostarczane jest regularnie pierwszego dnia miesiąca. Popyt jest stały i wynosi 100 sztuk miesięcznie. Oczywiste jest, że $IFR = 99\%$ i $CSL = 0\%$ (bo w każdym okresie zabraknie jednej sztuki). *OFR* zależy od charakterystyki popytu. Jeżeli jeden klient zamówił 100 sztuk, to $OFR = 0\%$. Jeżeli dwóch klientów złożyło po jednym zamówieniu na 50 sztuk, to $OFR = 50\%$, ponieważ tylko jedno z dwóch zamówień zostało w całości zrealizowane.

Wróćmy do ustalenia satysfakcjonującej wartości R. Załóżmy, że chcemy zapewnić poziom obsługi *CSL* równy $n\%$. Szukamy zatem takiego R, że popyt w czasie oczekiwania na dostawę nie przekroczy tej wartości z prawdopodobieństwem $n/100$, czyli

$$P(X \leqslant R) = n/100.$$

Znając rozkład zmiennej losowej X, łatwo znajdujemy odpowiednią wartość R. Trochę więcej gimnastyki wymaga wyznaczenie R, które zapewni z góry zadany poziom *IFR*. Zgodnie z definicją,

$$IFR = \left(1 - \text{oczekiwany}\left(\frac{\text{niezaspokojony popyt}}{\text{popyt}}\right)\right) \cdot 100\%.$$

Jednak w praktyce stosuje się dosyć dobre przybliżenie, z którym łatwiej pracować

$$IFR = \left(1 - \frac{\text{oczekiwany niezaspokojony popyt}}{\text{oczekiwany popyt}}\right) \cdot 100\%,$$

my w dalszej części będziemy stosować ten właśnie wzór.

Oczekiwany popyt w okresie pomiędzy zamówieniami jest równy Q, a wartość oczekiwana niezaspokojonego popytu zależy od R i jest modelowana przez funkcję straty

$$G_{\mu,\sigma}(R) = \int_R^\infty (x - R) f_{\mu,\sigma}(x)dx,$$

gdzie $f_{\mu,\sigma}$ oznacza gęstość rozkładu normalnego o średniej μ i odchyleniu standardowym σ. Przy odrobinie cierpliwości można wykazać, że funkcja $G_{\mu,\sigma}$ jest ściśle malejąca, istnieje zatem funkcja do niej odwrotna, dzięki czemu R może być jednoznacznie wyznaczone. Odpowiednia wartość R uzyskiwana jest numerycznie. Dużym ułatwieniem przy obliczeniach jest standaryzacja rozkładu, która prowadzi do zależności

$$G_{\mu,\sigma}(R) = \sigma G_{0,1}\left(\frac{R-\mu}{\sigma}\right)$$

oraz formuła $G_{0,1}(R) = f_{0,1}(R) - R(1 - \Phi(R))$, którą można otrzymać z wyjściowego wzoru ($\Phi(R)$ to dystrybuanta rozkładu $N(0,1)$).

Przykład

Załóżmy, że popyt w czasie oczekiwania na dostawę modelowany jest rozkładem normalnym o średniej $\mu = 120$ i odchyleniu standardowym $\sigma = 40$. Czas oczekiwania na dostawę wynosi 1 tydzień, a zamówienie składane jest 24 razy w roku. Naszym zadaniem jest wyznaczenie strategii (R, Q), która zapewni $CSL = 80\%$. Jaki jest oczekiwany poziom *IFR* dla takiej strategii?

Obliczmy najpierw wielkość zamówienia:

$$Q = D/N = (120/7 \cdot 365)/24 \approx 261.$$

Zgodnie z definicją *CSL* szukamy kwantyla rzędu 0,8 dla zmiennej losowej X o rozkładzie $N(120, 40^2)$, tzn. takiej wartości R, że $P(X \leqslant R) = 0{,}8$. Korzystając z tablic lub dowolnego pakietu statystycznego, otrzymujemy

$$R = 153{,}6648 \approx 154.$$

Szukana strategia to (154,261). Teraz sprawdźmy, jaki jest oczekiwany *IFR* dla wyliczonej strategii

$$G_{120,40}(154) = 40G_{0,1}(0{,}85) = 40\big(f_{0,1}(0{,}85) - 0{,}85(1 - \Phi(0{,}85))\big) \approx 4{,}4.$$

A zatem,

$$IFR = 1 - 4{,}4/120 \approx 93{,}33\%.$$

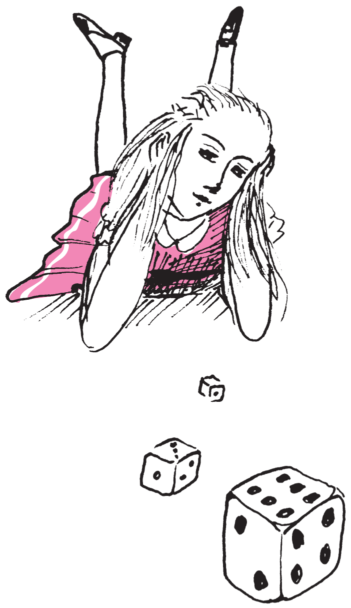
W niniejszym artykule przyjęliśmy kilka założeń ułatwiających zrozumienie badanego procesu i ułatwiających same obliczenia, np. popyt nie zawsze może być modelowany rozkładem normalnym. W przypadku towarów, które sprzedają się rzadko i w nieregularny sposób, konieczne jest użycie rozkładów dyskretnych, np. rozkładu Poissona lub ujemnego dwumianowego. To wiąże się nie tylko z zamianą rozkładu w obliczeniach, ale także ze zmianą sposobu, w jaki podchodzimy do problemu, np. przy rozkładach dyskretnych nie możemy oczekiwać, że istnieje moment, w którym ilość towaru w magazynie wynosi dokładnie R. Najczęstszą konsekwencją takiego założenia jest zbyt późne zamawianie względem modelu i nieosiąganie zadanych poziomów obsługi klienta.

W zespole Data Science naszym głównym zadaniem jest modyfikowanie bazowych modeli poprzez ulepszanie i rozwijanie pożądanych funkcjonalności. Dla modelu optymalnego zamawiania są to m.in. uwzględnienie zmienności czasu dostawy, modelowanie opóźnień w centralnych magazynach, rozpatrywanie wielu różnych dostawców, agregacja oraz redystrybucja zamówień i wiele innych. Kluczem jest wymyślenie (lub znalezienie w literaturze) takiego modelu, który balansuje teoretyczne wyrafinowanie z praktycznymi możliwościami implementacyjnymi i dostępnymi danymi. Czasami warto wybrać mniej dokładny model, który pozwala na prostsze i szybsze obliczenia. Warto uświadomić sobie tutaj rozmiar danych, z którymi mamy do czynienia – są to dziesiątki milionów zależnych od siebie części z kilkuletnią historią.

Złodziej strategii

Jedna z rzeczy, które trudno wytłumaczyć niematematykom, to dowody niekonstruktywne. W takim dowodzie autorzy dochodzą do wniosku, iż pewien obiekt matematyczny istnieje, często wiedząc o nim bardzo mało. Dzieje się tak dlatego, że stwierdzamy istnienie takiego obiektu, nie próbując go skonstruować, tylko powołując się na inne fakty. Jednym z najprostszych przykładów jest dowód przez „kradzież strategii”, który pokażę na przykładzie prostej gry.

Grą tą będą *dzielniki*, w które gra się następująco: na początku na tablicy mamy wypisane pewne liczby. Dwaj gracze na przemian wykonują ruchy. Ruch polega na wybraniu nieskreślonej liczby z tablicy i skreśleniu jej wraz ze wszystkimi jej dzielnikami. Ten, kto nie może się ruszyć, przegrywa. Jak widać, gra jest bez elementów losowych i rozstrzyga się w czasie skończonym. Dzięki temu wiemy, że któryś z graczy ma strategię wygrywającą. Teraz czas na właściwe pytanie: rozważmy grę w dzielniki na zbiorze liczb od 1 do 100. Który z graczy ma wówczas strategię wygrywającą?



Jak należy w tę grę grać, żeby wygrać? Nie wiemy… i nie musimy wiedzieć! Przy pytaniu o wygraną interesuje nas „kto” wygra, a nie „jak”. I odpowiemy na to pytanie dzięki następującemu spostrzeżeniu: liczba 1 pełni w tej grze osobliwą rolę – na pewno zostanie skreślona w pierwszym ruchu. Zanim z tego skorzystamy, rozpatrzmy grę w dzielniki na zbiorze liczb od 2 do 100. Który gracz wygrywa w drugiej grze?

Załóżmy wpierw, że strategię wygrywającą ma wtedy gracz rozpoczynający. W pierwszym ruchu wybiera liczbę x. W takim razie w pierwszej grze również wygrywa gracz rozpoczynający, w pierwszym ruchu skreślając x. Potem wykonuje ruchy jak w grze w dzielniki od 2 do 100, bo to już ta sama gra, w końcu jedynki nie można wybrać.

Załóżmy teraz, że gracz drugi ma strategię wygrywającą w grze „od dwójki”. Wtedy grając w grę „od jedynki”, w pierwszej turze skreślamy 1 i od tego momentu zachowujemy się jak gracz drugi w grze „od dwójki”…, kradnąc jego strategię i tym samym wygrywając.

Oznacza to, że w grze „od jedynki” gracz rozpoczynający może wygrywać zawsze. Ale jak? Nie wiemy i tym sposobem, niestety, się nie dowiemy…

*Bartłomiej ŻAK**

*Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski