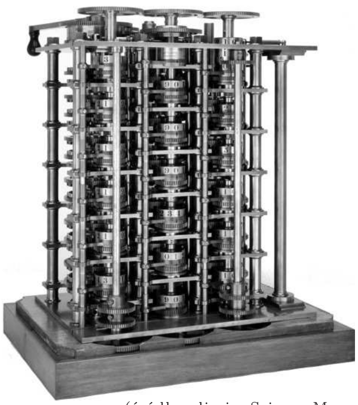
Pamiętajmy, że na niewymiernych liczbach praktycznie nie potrafimy wykonywać tego typu obliczeń. Możemy albo robić to symbolicznie, albo po prostu przybliżać liczby niewymierne ich wymiernymi odpowiednikami i dalej już jest prosto. I tak zazwyczaj robią to nasze kalkulatory, komputery i inne urządzenia, które muszą wykonywać działania arytmetyczne. Stąd π„="3,14, a $\sqrt{2}$„="1,41.

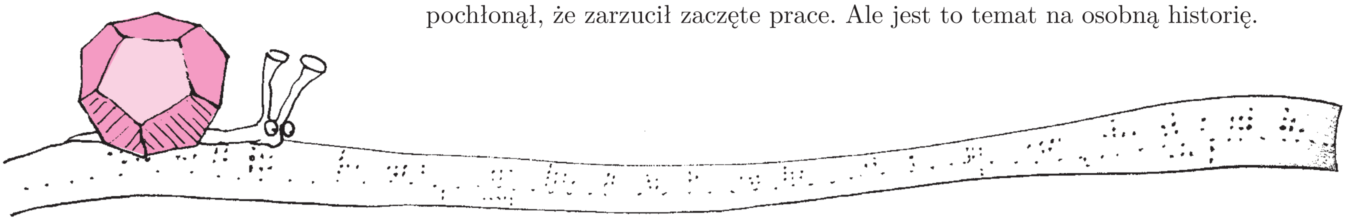
No dobra. To było proste, ale mieliśmy sytuację komfortową, kiedy to wartości wielomianu obliczaliśmy dla kolejnych liczb naturalnych. Co by jednak było, gdyby argumenty były wymierne? Otóż nic by się nie zmieniło. Okazuje się, że jeśli operator Δ zastąpimy operatorem Δ_ε dla dowolnego wymiernego dodatniego ε i zdefiniujemy $\Delta_\varepsilon(P(x)) = P(x+\varepsilon) - P(x)$, to zachowamy podstawową cechę operatora Δ: zastosowanie tego operatora zmniejsza stopień wielomianu o 1. To nam wystarcza do tego, żeby powtórzyć naszą procedurę dla dowolnego początkowego x i dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Obliczenie kolejnych M wartości dla argumentów różniących się o z góry ustaloną stałą dla dowolnego wielomianu stopnia n wymaga zatem obliczenia jego n kolejnych wartości „na piechotę", a następnie zastosowania $M - n$ razy naszego schematu, za każdym razem wymagającego jedynie n dodawań, bez wykonywania jakiegokolwiek mnożenia! Niewiarygodne!



(źródło zdjęcia: Science Museum)

Pierwsza maszyna różnicowa Babbage'a.

Na to, żeby metodę opisaną powyżej wykorzystać do budowy maszyny, przypuszczalnie wpadł jako pierwszy inżynier heskiej armii Johann Helfrich von Müller (1742–1830). Pomysł ten rozwinął i częściowo zrealizował angielski matematyk Charles Babbage (1791–1871). Jest to bohater niezwykły, wizjoner, twórca modelu komputera w postaci, której praktycznie dziś powszechnie używamy. Żył długo, choć jego życie nie było usłane różami. Dość młodo został profesorem matematyki w Cambridge, głównie za prace w dziedzinie kryptografii – ciągnęło go zawsze w kierunku zastosowań matematyki w informatyce, choć informatyki wtedy jeszcze nie było. W latach 20. XIX wieku wpadł na pomysł skonstruowania maszyny, która wykonywałaby automatycznie działania prowadzące do wyznaczania kolejnych wartości wielomianów według podanej wyżej metody. Sam mechanizm arytmometru był znany od prawie 200 lat dzięki konstrukcjom Schickarda, Pascala i Leibniza. Chodziło o to, żeby ustawić kilka arytmometrów tak, aby mogły sobie nawzajem przekazywać obliczone sumy w odpowiedniej kolejności. Efektem prac Babbage'a była maszyna różnicowa, której model przedstawiony jest na zdjęciu obok. Wymagała ona ręcznego wykonania początkowych czynności. Babbage na tym nie poprzestał. Zaczął budowę kolejnej wersji maszyny różnicowej, która byłaby znacznie większa i… nigdy jej nie ukończył. Nie dlatego, żeby napotkał jakieś nieoczekiwane przeszkody. Po prostu w trakcie prac nad nią wpadł na pomysł, który tak go pochłonął, że zarzucił zaczęte prace. Ale jest to temat na osobną historię.



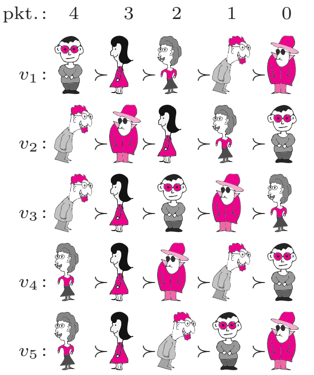
System wyborczy Chamberlina–Couranta

*Piotr SKOWRON**

System Chamberlina–Couranta nie jest jedynym alternatywnym systemem wyboru komitetów względem systemów partyjnych. Zainteresowanym Czytelnikom polecamy zapoznanie się z systemem pojedynczego głosu przechodniego oraz z systemami opartymi o aprobatę [2], m.in. z systemem opartym o *proporcjonalną aprobatę*.

Rozważmy scenariusz, w którym wyborcy głosują na kandydatów w celu wyłonienia zwycięskiego komitetu (podzbioru kandydatów o ustalonej liczebności). Przykładami takiego scenariusza są wybory parlamentarne, wybory samorządowe, wybory do rad nadzorczych itp. W wielu przypadkach wynik takich wyborów zależy nie tylko od preferencji wyborców względem kandydatów, ale również od systemu wyborczego, czyli od metody używanej do wyłaniania zwycięzców. Różne systemy wyborcze mają także różny wpływ na późniejsze zachowanie członków wybranego komitetu. Przykładowo w systemach wyboru parlamentu, w których obywatele pośrednio lub bezpośrednio głosują na partie polityczne, istnieje ryzyko, że wybrani politycy będą silniej związani z macierzystymi partiami niż z własnym elektoratem. Ta obserwacja zainspirowała dwóch amerykańskich politologów, Johna Chamberlina i Paula Couranta, do zaprojektowania nowego systemu wyborczego, alternatywnego do systemów partyjnych [1].

*University of Oxford



Rys. 1. Rysunek ilustruje przykładowe wybory. Dla wyborcy v_1 najbardziej preferowanym kandydatem jest . Jeżeli byłby reprezentantem dla v_1, to zadowolenie v_1 osiągnęłoby 4 punkty ($z_{\mathrm{Bor}}(\ ) = 4$). Drugim w kolejności preferencji jest (zadowolenie v_1 z takiego reprezentanta wynosiłoby 3 punkty, $z_{\mathrm{Bor}}(\ ) = 3$), trzecim (z zadowoleniem wynoszącym 2 punkty, $z_{\mathrm{Bor}}(\ ) = 2$), itd.

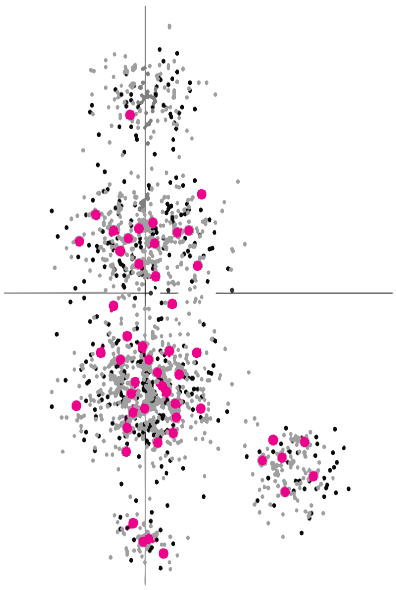
Zanim opiszemy system Chamberlina–Couranta, wprowadźmy kilka oznaczeń i pomocniczych definicji. Niech $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ i $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ oznaczają odpowiednio zbiór wyborców i zbiór kandydatów. Niech k oznacza rozmiar komitetu, który chcemy wybrać spośród kandydatów. Każdy wyborca oddaje głos poprzez uszeregowanie zbioru kandydatów od najbardziej do najmniej preferowanego. Przykładowe wybory przedstawione są na rysunku 1. Dla wyborcy v i kandydata c przez $\mathrm{pos}_v(c)$ oznaczmy pozycję kandydata c w rankingu preferencji wyborcy v. Przykładowo, jeżeli c jest ulubionym kandydatem v, to $\mathrm{pos}_v(c) = 1$, jeżeli c jest drugi na liście preferencji v, to $\mathrm{pos}_v(c) = 2$ itd. Zdefiniujmy zadowolenie wyborcy v z kandydata c za pomocą metody Bordy: $z_{\mathrm{Bor}}(v, c) = m - \mathrm{pos}_v(c)$.

Dla każdego wyborcy v i dla każdego k-elementowego podzbioru kandydatów S, przez $\mathrm{repr}(v, S)$ oznaczmy najbardziej preferowanego względem v członka S, tzw. *reprezentanta v w S*. Przykładowo, dla wyborcy v_1 z rysunku 1 oraz dla komitetu $S = \{\ ,\ ,\ \}$, mamy $\mathrm{repr}(v, S) = \ $. Zdefiniujmy teraz zadowolenie wyborcy v z komitetu S jako zadowolenie wyborcy z jego reprezentanta w S: $z_{\mathrm{Bor}}(v, S) = z_{\mathrm{Bor}}(v, \mathrm{repr}(v, S))$. Dla naszego poprzedniego przykładu mamy więc:

$$z_{\mathrm{Bor}}(v_1, \{\ ,\ ,\ \}) = z_{\mathrm{Bor}}(v_1, \ ) = m - \mathrm{pos}_{v_1}(\ ) = 5 - 3 = 2.$$

Zdefiniujmy wynik punktowy k-elementowego komitetu $S \subseteq C$ jako sumę zadowoleń poszczególnych wyborców: $\mathrm{pkt}(S) = \sum_{v \in V} z_{\mathrm{Bor}}(v, S)$. System Chamberlina–Couranta wybiera komitet z najwyższym wynikiem punktowym $\mathrm{argmax}_{S \subseteq C\colon |S|=k}\, \mathrm{pkt}(S)$. Innymi słowy, w systemie Chamberlina–Couranta zwycięzcą zostaje komitet, który minimalizuje średnią pozycję reprezentanta w rankingu wyborcy. Dla przykładu z rysunku 1 i dla $k = 2$ zwycięzcą zostaje $\{\ ,\ \}$ z wynikiem punktowym $\mathrm{pkt}(\{\ ,\ \}) = 2 + 4 \cdot 4 = 18$. W tym przypadku reprezentant wyborcy v_1 znajduje się na trzeciej pozycji w jego rankingu preferencji, zaś pozostali czterej wyborcy mają jako reprezentantów swoich ulubionych kandydatów. Dla tego komitetu średnia pozycja reprezentanta w rankingu wyborcy wynosi $\frac{\sum_{v \in V} \mathrm{pos}_v(\mathrm{repr}(v,S))}{n} = \frac{3+4\cdot 1}{5} = 1{,}4$.

Intuicyjnie, w systemie Chamberlina–Couranta zwycięski komitet w pewnym sensie najlepiej reprezentuje elektorat wyborczy. Intuicję tę potwierdza rysunek 2, opisujący pewne przykładowe społeczeństwo, gdzie wyborcy i kandydaci reprezentowani są przez punkty na płaszczyźnie. Położenie punktów można interpretować na wiele sposobów. Przykładowo, położenie na osi „x” może odzwierciedlać preferencje wyborców względem polityki ekonomicznej państwa (punkty bardziej przesunięte w lewą stronę odpowiadają wyborcom/kandydatom o bardziej socjalnych poglądach, zaś te przesunięte w prawą stronę – bardziej liberalnym). Położenie na osi „y” możemy interpretować jako preferencje światopoglądowe wyborców (wyborcy konserwatywni *vs.* liberalni). Rzeczywiście, punkty odpowiadające zwycięskiemu komitetowi (kolorowe punkty) pokrywają płaszczyznę „podobnie” do punktów odpowiadających wyborcom (czarne punkty). Jednak czy zawsze jest możliwe wybranie komitetu, który będzie dobrze reprezentował wyborców? Niżej spróbujemy odpowiedzieć na to nurtujące pytanie.



Rys. 2. Czarne punkty reprezentują wyborców, szare – kandydatów, a kolorowe – zwycięski komitet. Zakładamy preferencje geometryczne, czyli wyborca preferuje kandydatów, którzy odpowiadają bliższym mu punktom.

Przypomnijmy, że funkcja W Lamberta jest zdefiniowana tak, aby dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zachodziło $a = W(a)e^{W(a)}$. W szczególności dla $a > e$ zachodzi $W(a) < \ln(a)$. Przyjmijmy $x = \frac{mW(k)}{k}$ i rozważmy rankingi wyborców obcięte do pierwszych x pozycji. Rozważmy następującą iteracyjną procedurę: w pierwszym kroku wybieramy kandydata, który występuje najczęściej wśród pierwszych x pozycji. Nazwijmy takiego kandydata a_1. Następnie dla każdego wyborcy, dla którego a_1 występuje na jednej z pierwszych x pozycji, zaznaczamy, że a_1 będzie jego tymczasowym reprezentantem; ponadto usuwamy wszystkich takich wyborców, tzn. wyborców, którzy mają przypisanego tymczasowego reprezentanta. W drugim kroku wybieramy kandydata, który występuje najczęściej wśród pierwszych x pozycji dla pozostałych (nieusuniętych) wyborców – nazwijmy go a_2. Podobnie jak poprzednim razem, przypisujemy a_2 jako tymczasowego reprezentanta dla wyborców, dla których a_2 występuje wśród pierwszych x pozycji, a następnie usuwamy tych wyborców. Całą procedurę powtarzamy k razy.

Wykażemy teraz przez indukcję, że po i-tym kroku powyższej procedury co najwyżej $n\big(1-\frac{W(k)}{k}\big)^i$ wyborców nie ma przypisanego tymczasowego reprezentanta. Dla $i=0$ nie został usunięty żaden wyborca, czyli pozostało ich $n = n\big(1-\frac{W(k)}{k}\big)^0$; dowodzi to kroku bazowego indukcji. Niech n_i oznacza liczbę wyborców, którzy zostali bez tymczasowych reprezentantów po i-tym kroku. Tacy wyborcy mają wśród swoich pierwszych x pozycji kandydatów, którzy do i-tego kroku nie zostali jeszcze wybrani przez naszą iteracyjną procedurę (jest dokładnie $(m-i)$ takich kandydatów). Z zasady szufladkowej Dirichleta wnioskujemy, że po i-tej iteracji jeden z pozostałych kandydatów występuje na pierwszych x pozycjach w listach preferencji dla co najmniej $\frac{n_i x}{m-i}$ nieusuniętych wyborców. Oznacza to, że w $(i+1)$-szym kroku usuniemy co najmniej $\frac{n_i x}{m-i}$ wyborców. Zatem

$$n_{i+1} \leqslant n_i - \frac{n_i x}{m-i} \leqslant n_i\left(1-\frac{x}{m}\right) = n_i\left(1-\frac{W(k)}{k}\right).$$

Zakładając, że nasza hipoteza indukcyjna jest spełniona dla pewnego i, czyli zakładając, że $n_i \leqslant n\big(1-\frac{W(k)}{k}\big)^i$, wnioskujemy

$$n_{i+1} \leqslant n_i\left(1-\frac{W(k)}{k}\right) \leqslant n\left(1-\frac{W(k)}{k}\right)^i\left(1-\frac{W(k)}{k}\right) = n\left(1-\frac{W(k)}{k}\right)^{i+1}.$$

Dowodzi to poprawności kroku indukcyjnego. W rezultacie dla $i=k$ otrzymujemy

$$n_k \leqslant n\left(1-\frac{W(k)}{k}\right)^k \leqslant n\left(\frac{1}{e}\right)^{W(k)} = \frac{nW(k)}{k}.$$

Podsumowując: w komitecie wybranym przez naszą iteracyjną procedurę co najmniej $\big(n-\frac{nW(k)}{k}\big)$ wyborców ma reprezentantów z pierwszych x pozycji. Pozostałych $\frac{nW(k)}{k}$ wyborców może mieć reprezentantów na dowolnych pozycjach. Niech p będzie średnią pozycją reprezentanta w wybranym komitecie (liczoną względem wszystkich wyborców). Wówczas

$$p \leqslant \frac{1}{n}\left[\left(n-\frac{nW(k)}{k}\right)x + \frac{nW(k)}{k}m\right] \leqslant x + \frac{W(k)}{k}m = \frac{2mW(k)}{k}.$$

Czy $\frac{p}{m} \leqslant \frac{2W(k)}{k}$ to dobra jakość reprezentacji? Gdyby użyć systemu Chamberlina–Couranta do polskich wyborów parlamentarnych, gdzie $k \approx 460$, a $m \approx 6000$, otrzymalibyśmy $\frac{p}{m} \leqslant 0{,}02$. Oznacza to, że niezależnie od preferencji wyborców, średni wyborca byłby reprezentowany przez kogoś spośród 2% swoich ulubionych kandydatów. Rysunek 3 przedstawia stosunek $\frac{p}{m}$ dla zmieniających się wartości rozmiaru komitetu k.

Na koniec zauważmy, że opisana powyżej iteracyjna procedura pozwala wytypować bardzo dobre (choć, być może, nieoptymalne) komitety. W niektórych przypadkach procedura ta może zostać użyta zamiast oryginalnego systemu Chamberlina–Couranta. Jej zaletą jest to, że zwycięski komitet może zostać łatwo znaleziony. Dla oryginalnego systemu Chamberlina–Couranta obecnie najefektywniejsza metoda znajdowania zwycięskiego komitetu polega na sprawdzeniu wyników punktowych wszystkich możliwych $\binom{m}{k}$ komitetów. Dla $k \approx 460$ i $m \approx 6000$, liczba $\binom{m}{k}$ ma 704 cyfry – w takim przypadku liczba wszystkich komitetów, które należy sprawdzić, jest zbyt duża nawet dla najnowocześniejszych komputerów. Wówczas zastosowanie rozwiązania przybliżonego to jedyna alternatywa. Czytelników zainteresowanych podobnymi pytaniami i bardziej szczegółową analizą odsyłamy do oryginalnego artykułu [3], a jako ćwiczenie proponujemy analizę systemu, w którym każdy wyborca powinien mieć r reprezentantów: zadowolenie wyborcy ze zbioru r reprezentantów definiujemy jako sumę zadowoleń z poszczególnych reprezentantów. Czy w takim systemie możemy znaleźć dolne ograniczenie na zadowolenie wyborców?

System Monroe. W 1995 Burt Monroe zauważył, że system Chamberlina–Couranta jest w pewnym stopniu niedoskonały. Spójrzmy na przykładowe wybory poniżej:

$$\begin{aligned} v_1 &: c_1 \succ c_2 \succ c_3 \succ \ldots \succ c_{100} \\ v_2 &: c_1 \succ c_2 \succ c_3 \succ \ldots \succ c_{100} \\ &\ldots \\ v_{999} &: c_1 \succ c_2 \succ c_3 \succ \ldots \succ c_{100} \\ v_{1000} &: c_{100} \succ c_2 \succ c_3 \succ \ldots \succ c_1 \end{aligned}$$

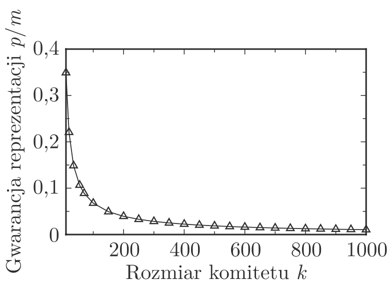
Dla $k=2$ zwycięskim komitetem jest $\{c_1, c_{100}\}$ – w tym przypadku każdy wyborca ma swojego ulubionego kandydata jako reprezentanta. Jednak społeczne poparcie dla kandydata c_{100} jest zdecydowanie niższe niż dla c_1. Czy aby na pewno c_{100} powinien być członkiem zwycięskiego komitetu? Burt Monroe zasugerował, aby każdy członek wybranego komitetu reprezentował mniej więcej taką samą liczbę wyborców, czyli $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ lub $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ wyborców. Obliczając wynik punktowy dla komitetu S, staramy się znaleźć możliwie najlepsze przyporządkowanie członków komitetu do wyborców, tak aby kryterium Monroe'a zostało spełnione. Np. gdy $S = \{c_1, c_2\}$, optymalne przypisanie członków komitetu do wyborców to np. takie, gdzie pierwszych 500 wyborców jest reprezentowanych przez c_1, a następnych 500 przez c_2. Wtedy komitet $\{c_1, c_2\}$ ma wynik punktowy:

$$\mathrm{pkt}_{\mathrm{Mon}}(\{c_1, c_2\}) = 500 \cdot 99 + 500 \cdot 98.$$

Dla komitetu $\{c_1, c_{100}\}$ ten wynik wynosi tylko:

$$\mathrm{pkt}_{\mathrm{Mon}}(\{c_1, c_{100}\}) = 500 \cdot 99 + 1 \cdot 99.$$

Podobnie jak w systemie Chamberlina–Couranta w systemie Monroe zwycięski komitet to ten z najwyższym wynikiem punktowym. Ćwiczenie dla zainteresowanych Czytelników: czy w przypadku systemu Monroe również możemy znaleźć górne ograniczenie na średnią pozycję reprezentanta wyborcy?



Rys. 3. Stosunek $\frac{p}{m}$ dla zmieniającego się rozmiaru komitetu k. Dla $k = 460$ stosunek $\frac{p}{m}$ wynosi mniej niż 0,02, co oznacza, że średnio reprezentant wyborcy jest z jego punktu widzenia lepszy niż 98% kandydatów.

Literatura

[1] J. Chamberlin and P. Courant, *Representative deliberations and representative decisions: Proportional representation and the borda rule*, American Political Science Review, 77(3):718–733, 1983.
[2] D. M. Kilgour, *Approval Balloting for Multi-winner Elections*, pages 105–124, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010.
[3] P. Skowron, P. Faliszewski, and A. Slinko, *Achieving fully proportional representation: Approximability results*, Artificial Intelligence, 222:67–103, 2015.