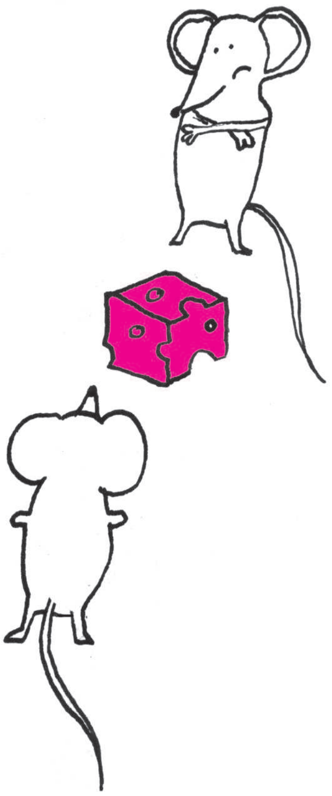
# „Co jest grane” w dylematach społecznych

*Tadeusz PŁATKOWSKI**



Dylemat społeczny to sytuacja grupy ludzi, w której interes jednostki nie jest zbieżny z interesem grupy – występuje konflikt między interesem prywatnym a zbiorowym. Charakteryzuje się tym, że jeżeli członkowie grupy postąpią zgodnie ze swoimi indywidualnymi interesami, to zyskają mniej, niż gdyby brali przede wszystkim pod uwagę w swoich działaniach interes grupy. Jeżeli jednak wszyscy mieliby postąpić zgodnie z interesem grupy, to osoba, która jako jedyna zmieni decyzję i postąpi zgodnie ze swoim indywidualnym interesem, zyska więcej, niż gdyby działała zgodnie z interesem grupy.

Wiele globalnych problemów ma charakter dylematu społecznego, np. zanieczyszczanie lub niszczenie środowiska naturalnego, konflikty zbrojne, realizacja wspólnych projektów ekonomicznych, socjalnych itp. Dylematy społeczne występują również w małych, np. dwuosobowych grupach. Zaczniemy właśnie od takiego przykładu.

**Przykład 1.** Każda z dwóch osób (graczy) decyduje, nie wiedząc, jaka jest decyzja drugiej strony, czy chce dostać, np. w złotówkach, 1000 (nazwijmy to akcją D), czy też druga osoba ma dostać 2000 (akcja C). W wyniku tych decyzji następuje przydział pieniędzy. Zakładamy anonimowość graczy: osoby te się nie znają i nigdy się nie poznają, decyzja gracza nie jest i nigdy nie będzie znana przez nikogo innego, włącznie z anonimowym systemem czy instytucją, która przydziela kwoty. Zakładamy też racjonalność graczy: gracza nie interesuje, ile dostanie drugi (przeciwnik), a jedynie, ile dostanie on sam. No i że każdy woli więcej niż mniej…

Wybierzesz C czy D, będąc jednym z graczy? Jeśli obaj wybierzecie (zagracie) C, to dostaniecie po 2000, jeżeli D, to po 1000. Naturalne wydawałoby się, że gracze zagrają C. Jeżeli uważasz, że przeciwnik też myśli w ten sposób, czyli zagra C, to możesz ulec pokusie, by zagrać D. Dlaczego? Bo wtedy dostaniesz 1000 za swoją decyzję oraz 2000 w wyniku decyzji C przeciwnika, czyli razem 3000! Ale przeciwnik też może pomyśleć, że zagrasz C, więc także u niego może pojawić się pokusa, by zagrać D, aby otrzymać łącznie 3000. Jeżeli obaj tak zagracie, to dostaniecie po 1000. Co gorsza, jeżeli zagrasz C, a przeciwnik ulegnie pokusie (czyli zagra D), to nic nie dostaniesz!

Opisana sytuacja to dylemat społeczny. Jako interes grupy dwóch graczy przyjmiemy zagranie C przez obu (dostają wtedy po 2000). Interes indywidualny gracza to ulegnięcie pokusie (z perspektywą otrzymania 3000), czyli zagranie D. Jeżeli jednak obaj gracze postąpią zgodnie ze swoim indywidualnym interesem, to dostaną po 1000. Istnieją różne typy dylematów społecznych. Zajmiemy się modelami matematycznymi dylematów. Opiszemy wpierw najprostsze ciekawe sytuacje.

Niech grupa składa się z dwóch nierozróżnialnych graczy, mających do wyboru, tak jak w omawianym wyżej przykładzie, tylko dwie akcje (strategie): C – współpracować, lub D – zdradzić (od ang. *cooperate–defect*). Będziemy zakładać, że gracze są racjonalni, a ich decyzje anonimowe. W wyniku podjętych akcji gracze otrzymują wypłaty, określone tzw. macierzą gry:

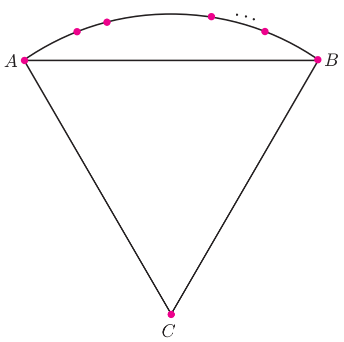
(1)

| | C | D |
|---|---|---|
| C | $R, R$ | $S, T$ |
| D | $T, S$ | $P, P$ |

Pierwsza współrzędna każdej pary wypłat w macierzy oznacza wypłatę gracza wierszowego (inaczej: pierwszego), gdy gra strategię numerującą ten wiersz, druga – gracza kolumnowego (drugiego), gdy gra strategię numerującą kolumnę. Przykładowo: w parze $(S, T)$, gdy gracz wierszowy gra C, a kolumnowy gra D, wypłatą gracza wierszowego jest $S$, a kolumnowego – $T$. W ten sposób uzyskaliśmy (skończoną) dwuosobową grę strategiczną. Ogólnie:

**Rozwiązanie zadania M 1458.**
*Odp.* Tak!

Wystarczy wybrać trzy punkty $A$, $B$ i $C$ leżące w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku 1, a pozostałe $n-3$ punkty z krótszego łuku $AB$ okręgu o środku $C$ i promieniu $CA$.




*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

**Rozwiązanie zadania M 1457.**

(a) Ponieważ iloczyn liczb $\frac{x_k+x_{k+1}}{x_{k+1}+x_{k+2}}$, dla $k=1,\ldots,n$, wynosi 1, to korzystając z nierówności między średnimi, dostajemy

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k+x_{k+1}}{x_{k+1}+x_{k+2}} \geqslant n = \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k+x_{k+1}}{x_k+x_{k+1}}.$$

Odejmując od obu stron nierówności sumę

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_{k+1}}{x_{k+1}+x_{k+2}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_k+x_{k+1}},$$

dostajemy tezę.

(b) Będziemy korzystać z następującego lematu: *jeśli ciągi liczb rzeczywistych* $(a_k)_{k=1}^{n}$ *i* $(b_k)_{k=1}^{n}$ *spełniają*

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$$

*oraz*

$$b_1,\ldots,b_{n-1} \geqslant b_n,$$

*to wówczas*

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \geqslant$$
$$\geqslant a_1b_n+a_2b_1+\ldots+a_nb_{n-1}.$$

Prawdziwość lematu wynika z nierówności

$$(a_1-a_2)b_1+(a_2-a_3)b_2+$$
$$+\ldots+(a_{n-1}-a_n)b_{n-1} \geqslant$$
$$\geqslant (a_1-a_2+a_2-a_3+$$
$$+\ldots+a_{n-1}-a_n)b_n =$$
$$=(a_1-a_n)b_n = a_1b_n - a_nb_n,$$

która jest równoważna tezie.

Załóżmy, że ciąg $(x_i)$ jest nierosnący:

$$x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n > 0.$$

Wówczas

$$\frac{1}{x_2+x_3},\ldots,\frac{1}{x_{n-1}+x_n},\frac{1}{x_n+x_1} \geqslant \frac{1}{x_1+x_2}$$

i z lematu dostajemy

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}} =$$
$$=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+$$
$$+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_2+x_3}+$$
$$+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n}{x_n+x_1} =$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_k+x_{k+1}},$$

co dowodzi (2). Gdy ciąg $(x_1,\ldots,x_n)$ jest niemalejący, postępujemy analogicznie.

Teraz (3) otrzymujemy łatwo przez dodanie nierówności (1) i (2) stronami.

**Definicja 1.** (*Skończona*) $N$*-osobowa gra strategiczna* jest to trójka:

$$\langle \aleph, (S_i)_{i=1,\ldots,N}, (u_i)_{i=1,\ldots,N} \rangle, \tag{2}$$

gdzie $\aleph$ to zbiór $N$ graczy, $S_i$ – skończony zbiór strategii gracza $i$ (może być inny dla każdego gracza), $u_i : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_N \to R$ – funkcja wypłaty gracza $i$, dla $i=1,\ldots,N$.

Omówimy trzy sytuacje – gry dwuosobowe opisane powyższą macierzą wypłat – które – na razie intuicyjnie – uznamy za dylematy społeczne. W każdej z nich zbiór strategii każdego gracza to $\{C, D\}$, a wypłaty, czyli wartości funkcji wypłat z (2), to odpowiednie wyrazy ogólnej macierzy wypłat (1).

**1.** $T > R > P > S$. Każdą grę spełniającą te nierówności nazwiemy **dylematem więźnia**. Przykład 1 jest taką grą, gdyż $T = 3000$, $R = 2000$, $P = 1000$, $S = 0$. Nazwa wiąże się z pewną historyjką „śledczo-więzienną”. Wybrałem jednak inną (jej autorem jest noblista, Robert Aumann), by pokazać, że dylemat więźnia niekoniecznie musi się rozgrywać w areszcie...

**2.** $T > R > S > P$. Każdą grę spełniającą te nierówności nazwiemy grą **zamieć śnieżna**.

**Przykład 2.** Dwóch kierowców (graczy) siedzi w unieruchomionych autach, po przeciwnych stronach zasypanej przez lawinę drogi. Aby drogę odśnieżyć, należy zużyć $c > 0$ energii. Oznaczmy $b$ – korzyść każdego gracza z odśnieżenia drogi (a więc np. z dojechania do domu), przy czym $b > c$. Każdy podejmuje samodzielnie decyzję, czy odśnieżyć drogę (strategia C), czy czekać w aucie (strategia D). Zakładamy że jeśli obaj odśnieżają, to tracą $\frac{c}{2}$ energii każdy. Zakładamy też racjonalność i anonimowość graczy, oraz że decyzje graczy nie wpływają na ich reputację (choć nie wiem, czy nie chciałbym wpłynąć na reputację wygrzewającego się w aucie z drugiej strony lawiny, gdybym sam odśnieżył drogę...).

Grę opisuje macierz wypłat

| | C | D |
|---|---|---|
| C | $b-\frac{c}{2}, b-\frac{c}{2}$ | $b-c, b$ |
| D | $b, b-c$ | $0, 0$ |

Tu, w przeciwieństwie do dylematu więźnia, racjonalna decyzja zależy od tego, co się założy o drugim graczu. Jeżeli założyć, że drugi nie odśnieża (gra D), to lepiej odśnieżać, bo warto wrócić do domu ($b > c$). Jeżeli założyć, że drugi gracz gra C (odśnieża, bo też chce wrócić do domu!), to lepiej jest zostać w aucie ($b > b - \frac{c}{2}$). No, ale drugi też może tak przebiegle rozumować i wtedy obaj zamarzną (wypłata 0). Mamy w ogólnych oznaczeniach wypłat gry dwuosobowej: $T = b > R = b - \frac{c}{2} > S = b - c > P = 0$, a więc Przykład 2 opisuje grę zamieć śnieżna.

**3.** $R > T > P > S$. Każdą grę spełniającą te nierówności nazwiemy grą **polowanie na jelenia**.

**Przykład 3.** Dwóch myśliwych może zapolować na jelenia (strategia C) lub na zające (strategia D). Ich decyzje zapadają jednocześnie i niezależnie, anonimowo, bez straty reputacji. Jeleń ma wartość $2b$, zające po $c > 0$, przy czym $b > 2c$. Jeśli obaj zapolują na jelenia, to upolują go, dzieląc zysk po równo, czyli otrzymując po $b$. Jeśli pierwszy zagra C, drugi D, to pierwszy nic nie upoluje, czyli otrzymuje 0, drugi upoluje dwa zające i otrzymuje $2c$. Jeśli obaj zagrają D, to upolują po jednym zającu (wypłata $c$ dla każdego).

Macierz wypłat graczy ma postać

| | C | D |
|---|---|---|
| C | $b, b$ | $0, 2c$ |
| D | $2c, 0$ | $c, c$ |

W tej historii $R = b$, $T = 2c$, $P = c$, $S = 0$, a więc rzeczywiście odpowiada ona grze polowanie na jelenia (często przyjmuje się że wypłata ze strategii D jest równa $c$ niezależnie od tego, co gra partner; nie zmienia to podstawowych własności matematycznych tej gry).

Jakie strategie wybiorą myśliwi? Gdyby byli pewni, że partner (tu raczej partner, a nie przeciwnik) ma pewną rękę i jak wyceluje, to na pewno trafi, to chyba nie ma wątpliwości, że należy grać C ($b > 2c$). Ale co zagramy, gdy partner miał np. nieprzespaną noc lub podejrzewamy, że ulegnie pokusie strzelenia do tego, co się nawinie, a my nie możemy wrócić z pustymi rękami? Albo że partner nie ma do nas pełnego zaufania, że trafimy, a także nie może do domu wrócić z pustymi rękami i dlatego wymierzy raczej w zająca (założyliśmy, że trafienie zająca jest pewne)? Wtedy decyzja o wyborze strategii nie jest już tak oczywista.

Podaliśmy trzy przykłady gier dwuosobowych, każda z innym układem nierówności na parametry $T, R, P, S$ i z (intuicyjnie) innego typu „dylematem”. No dobrze, ale przecież istnieje jeszcze 21 innych układów ostrych nierówności spełnianych przez te parametry.

Sformułujemy definicję dylematu społecznego dla ogólnej klasy gier. Okaże się że obejmuje ona ważne i interesujące w zastosowaniach gry wieloosobowe, a dla gier dwuosobowych „zostawia” jedynie gry opisane w Przykładach 1, 2, 3!

Rozważamy zbiór $\aleph$ złożony z $N \geqslant 2$ racjonalnych graczy, mających do wyboru strategię C lub D. Niech $n = 0, \ldots, N$ oznacza liczbę osób grających C. Zakładamy, że gracze są nierozróżnialni, a więc wystarczy określić wypłatę osoby grającej C i osoby grającej D dla wszystkich argumentów $n$. Zakładamy pełną anonimowość i racjonalność graczy. Niech $P_{\mathrm{C}}(n)$, $n = 1, \ldots, N$ oznacza wypłatę gracza grającego C (C-gracza), a $P_{\mathrm{D}}(n)$, $n = 0, \ldots, N-1$ – wypłatę D-gracza, zwrot „mieć lepiej” (gorzej) oznacza mieć wyższą (niższą) wypłatę. Zakładamy dla uproszczenia, że wszystkie wypłaty są różne.

**Definicja 2.** *Dylemat społeczny* jest to gra strategiczna (2), w której

$$S_i = \{\mathrm{C}, \mathrm{D}\}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

a funkcje wypłat $u_i$ są określone przez funkcje $P_{\mathrm{C}}(n)$ i $P_{\mathrm{D}}(n)$, spełniające aksjomaty:

**Aksjomat 1.** $N$ graczy grających C ma lepiej niż $N$ graczy grających D:

$$P_{\mathrm{C}}(N) > P_{\mathrm{D}}(0).$$

**Aksjomat 2.** W każdej mieszanej (to znaczy zawierającej co najmniej jednego gracza grającego C i jednego gracza grającego D) grupie $N$ graczy:

a. D-gracz ma lepiej niż C-gracz:

$$P_{\mathrm{D}}(n) > P_{\mathrm{C}}(n), \quad n = 1, \ldots, N-1.$$

b. Jeśli $n \leqslant N-2$, to jeżeli D-gracz zmieni strategię na C, to pozostali D-gracze będą mieli lepiej niż przed zmianą:

$$P_{\mathrm{D}}(n) < P_{\mathrm{D}}(n+1), \quad n = 0, \ldots, N-2.$$

**Aksjomat 3.** Jeśli $n \geqslant 2$, to jeżeli C-gracz zmieni strategię na D, pozostali C-gracze będą mieli gorzej niż przed zmianą:

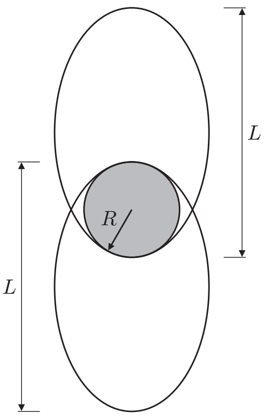
$$P_{\mathrm{C}}(n-1) < P_{\mathrm{C}}(n), \quad n = 2, \ldots, N.$$

**Aksjomat 4.** Dla co najmniej jednego układu $N$ graczy z $n \geqslant 1$ osobami grającymi C grający C będzie miał lepiej, zmieniając strategię na D (mówimy, że strategia C nie dominuje ściśle strategii D):

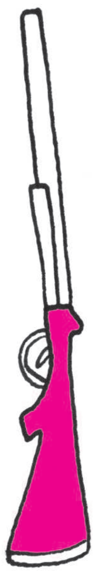
$$\exists n \in \{1, \ldots, N\} : P_{\mathrm{C}}(n) < P_{\mathrm{D}}(n-1).$$

Przedstawimy trzy interesujące i ważne w zastosowaniach gry $N$-osobowe, i udowodnimy, że są one dylematami społecznymi w sensie Definicji 2 dla dowolnego $N \geqslant 2$.

**Rozwiązanie zadania F 879.**
Rakiety będą się poruszały po elipsach (rysunek).



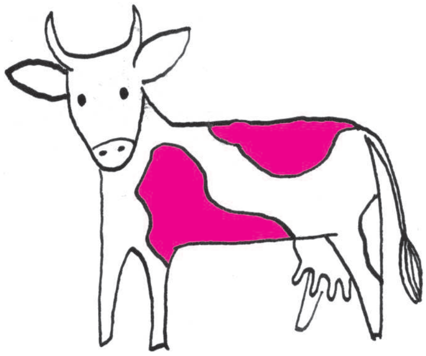

Punkt startu każdej z nich odpowiada minimalnej odległości od środka Ziemi, a punkt orbity leżący dokładnie nad punktem Ziemi po jej przeciwnej stronie stanowi apogeum orbity. W tych punktach prędkość rakiety jest prostopadła do prostej, poprowadzonej od orbity do środka Ziemi. Niech $L$ będzie dłuższą osią orbity. Maksymalna odległość między rakietami wynosi $D = 2L - 2R$. Okres obiegu orbity przez rakietę wynosi $T = 2t$, gdzie $t$ jest podanym w zadaniu okresem. Oznaczmy okres obiegu, gdyby rakieta poruszała się po orbicie kołowej o promieniu $R$ przez $T_1$. Zgodnie z III prawem Keplera $(T/TI)^2 = [(L/2)/R]^3$ skąd $L = 2R[(T/T_1)^2]^{1/3}$. Ponieważ przyspieszenie dośrodkowe rakiety na orbicie wynosi g, to mamy $\mathrm{g} = (2\pi/T_1)^2 R$, czyli $T_1 = 2\pi(R/\mathrm{g})^{1/2}$. Stąd $L = 2R(4t^2\mathrm{g}/4\pi^2 R)^{1/3} \approx 5{,}67R$ czyli $D \approx 9{,}34R \approx 5{,}98 \cdot 10^4$ km.



**Przykład 4. $N$-osobowy dylemat więźnia.** Każdy z $N$ graczy wybiera jedną strategię: C – współpracować, ponosząc koszt $c$, lub D – nic nie robić. Strategia współpracy przynosi zysk $b$, $b > c > 0$, który jest równo dzielony między pozostałych $N-1$ graczy (czyli gracz współpracujący nie bierze udziału w podziale wypracowanego przez siebie zysku!).

Funkcje wypłat mają postać:

$$P_{\mathrm{C}}(n) = -c + \frac{b(n-1)}{N-1}, \qquad n = 1, \ldots, N,$$
$$P_{\mathrm{D}}(n) = \frac{bn}{N-1}, \qquad n = 0, \ldots, N-1.$$



**Przykład 5. Wspólne dobro.** Każdy z $N$ graczy otrzymuje niepodzielne „dobro” o wartości $c$ i ma dwie akcje do wyboru: C – przekazać je do wspólnej puli lub D – nie przekazać. Gdy wszyscy gracze wybiorą strategie, następuje efekt synergii: zawartość wspólnej puli jest powiększona $r$ razy, $1 < r < N$, i podzielona równo pomiędzy wszystkich graczy.

Funkcje wypłat mają postać:

$$P_{\mathrm{C}}(n) = rnc/N, \qquad n = 1, \ldots, N,$$
$$P_{\mathrm{D}}(n) = rnc/N + c, \qquad n = 0, \ldots, N-1.$$

**Przykład 6. Dylemat wspólnego pastwiska.** Każdy z $N$ rolników może hodować jedną krowę (strategia D) albo nie hodować (strategia C) na wspólnym pastwisku. Niech $b$ będzie zyskiem rolnika z hodowania krowy, a $c$ wynikającym z tego zanieczyszczeniem środowiska. Zakładamy $0 < b < c < bN$, oraz że wszyscy rolnicy (czyli też grający C!) ponoszą po równo koszt zanieczyszczenia środowiska przez $N-n$ krów ($n$ to liczba C-graczy, czyli rolników, którzy nie hodują krowy!).

Funkcje wypłat mają postać:

$$P_{\mathrm{C}}(n) = -\frac{c(N-n)}{N}, \qquad n = 1, \ldots, N,$$
$$P_{\mathrm{D}}(n) = b - \frac{c(N-n)}{N}, \qquad n = 0, \ldots, N-1.$$

Udowodnimy

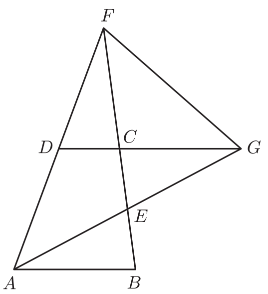
**Stwierdzenie 1.** *Dla $N \geqslant 2$ gry zdefiniowane przez Przykłady 4, 5, 6 są dylematami społecznymi. Dla $N = 2$ każda z nich jest* dylematem więźnia (*czyli spełnia nierówności $T > R > P > S$*).

*Dowód.* W każdym z Przykładów 4, 5, 6 postępujemy tak samo. Aksjomaty 1 i 2a sprawdzamy przez podstawienie. Aksjomaty 2b i 3 wynikają z faktu, że $P_{\mathrm{C}}$ i $P_{\mathrm{D}}$ są ściśle rosnące. Nierówność definiująca Aksjomat 4 zachodzi dla każdego $n = 1, \ldots, N$. Dla $N = 2$ łatwo sprawdzić, że w każdym z Przykładów 4, 5 i 6 zachodzi $T > R > P > S$, czyli każdy jest dylematem więźnia. Proste rachunki zostawiamy Czytelnikowi. □

**Stwierdzenie 2.** *Dla $N = 2$ istnieją tylko trzy gry (czyli trzy układy nierówności spełnianych przez wypłaty $T, R, P, S$) będące dylematami społecznymi:* dylemat więźnia, zamieć śnieżna i polowanie na jelenia.

*Dowód.* Dla $N = 2$ i ogólnej macierzy wypłat (1) z parametrami $R, S, T, P$, Aksjomaty 1, 2a, 2b, 3 dają nierówności: 1: $R > P$, 2a: $T > S$, 2b: $P < T$, 3: $R > S$. Aksjomat 4 ma postać (przypomnijmy, że rozważamy tylko nierówności ostre): $T > R \ \vee \ P > S$, a zatem dopuszcza trzy układy nierówności, czyli trzy dylematy społeczne:
4a: $S < P \ \wedge \ R < T$: dylemat więźnia.
4b: $S > P \ \wedge \ R < T$: zamieć śnieżna.
4c: $S < P \ \wedge \ R > T$: polowanie na jelenia. □

**Rozwiązanie zadania M 1456.**
Niech przedłużenia ramion $AD$ i $BC$ przecinają się w punkcie $F$, a proste $AE$ i $DC$ w punkcie $G$.




Wówczas trójkąty $ABE$ i $GCE$ są przystające, a w szczególności $GC = AB$ oraz $E$ jest środkiem $AG$. Ponadto $D$ jest środkiem $AF$, ponieważ odcinek $CD$ jest równoległy do $AB$ i dwa razy krótszy. Zatem $FE$ i $GD$ są środkowymi w trójkącie $AGF$.

Skoro w czworokąt $AECD$ można wpisać okrąg, to zachodzi równość

$$EC + DA = AE + CD.$$

Ponadto ten okrąg jest wpisany w trójkąty $AGD$ i $AEF$, które mają równe pola (równe połowie pola trójkąta $AGF$). W takim razie mają również równe obwody, czyli

$$AE + EG + GC + CD + DA = AE + EC + CF + FD + DA.$$

Dodając te równości stronami i upraszczając, otrzymujemy równość

$$EG + GC + DA = CF + FD + AE.$$

Skoro wiemy, że $EG = AE$ i $DA = FD$, to mamy też $GC = CF$. Stąd dostajemy $AB = GC = CF = BC$, czyli tezę.

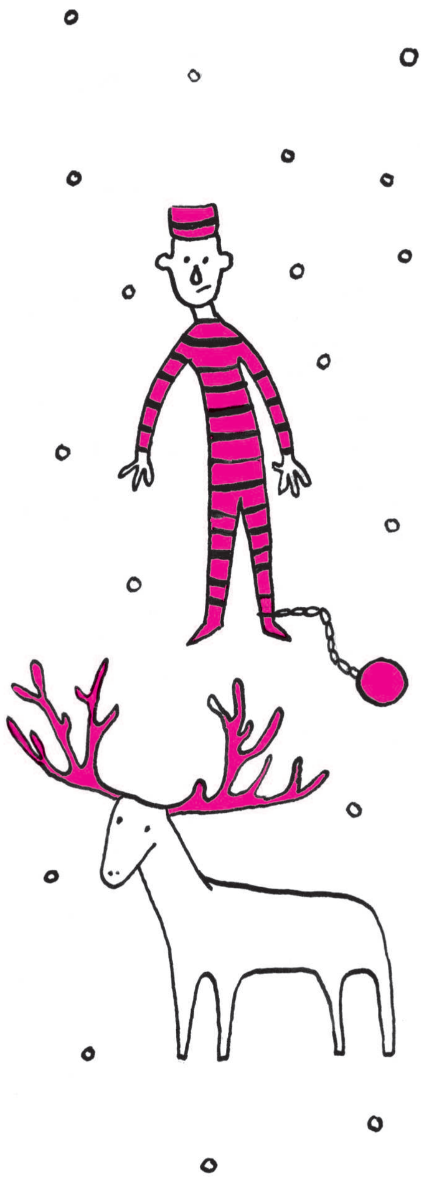
**Rozwiązanie zadania F 880.**
Zależność $E = A(1 + \cos \Omega t) \cos \omega t$ można zapisać jako

$$A \cos \omega t + (1/2)A \cos[(\omega - \Omega)t] + \\ + (1/2)A \cos[(\omega + \Omega)t].$$

Oznacza to, że zmodulowana amplitudowo fala stanowi sumę trzech monochromatycznych fal o częstościach $\omega$, $\omega_1 = \omega - \Omega$ i $\omega_1 = \omega + \Omega$. Energie fotonów odpowiadające każdej z tych fal wynoszą odpowiednio:

$$W = \hbar\omega = 2{,}1 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J},$$
$$W_1 = \hbar\omega_1 = 1{,}89 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J},$$
$$W_2 = \hbar\omega_2 = 2{,}31 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J}.$$

Ponieważ energia jonizacji atomu wodoru $W_i = 13{,}5$ eV $= 2{,}16 \cdot 10^{18}$ J jest większa od energii $W$ i energii $W_1$ to fale o częstościach $\omega$ i $\omega_1$ nie mogą spowodować jonizacji atomu wodoru, natomiast może ją spowodować fala o częstości $\omega_2$. Maksymalna energia „wybitych” przez odpowiadające jej fotony elektronów będzie równa $W_2 - W_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-19}$ J.



Dla omawianych gier strategicznych możemy podać dodatkową, „psychologiczną” charakterystykę dylematów społecznych za pomocą terminów pokusa i obawa.

**Pokusa**: W grupie $N$ graczy z $n \geqslant 1$ C-graczy pokusa występuje, gdy gracz grający C będzie miał lepiej, zmieniając strategię na D:

$$P_{\mathrm{C}}(n) < P_{\mathrm{D}}(n-1).$$

Zauważmy, że Aksjomat 4 można sformułować tak: dla $n \geqslant 1$ występuje pokusa.

**Obawa**: W grupie $N$ graczy z $n \geqslant 2$ C-graczy obawa występuje wtedy, gdy jeden z C-graczy (nazwijmy go **A**) obawia się następującego scenariusza: inny gracz grający C zmienia akcję na D, przez co obniża wypłatę **A**, i to do wartości niższej niż wypłata, która otrzymałby **A**, gdyby także zmienił swoją strategię na D. Odpowiada to zachodzeniu nierówności

$$P_{\mathrm{C}}(n) > P_{\mathrm{C}}(n-1) \ \wedge\ P_{\mathrm{D}}(n-2) > P_{\mathrm{C}}(n-1) \qquad \forall n = 2, \ldots, N.$$

Pierwsza nierówność odpowiada Aksjomatowi 3, druga Aksjomatowi 4 z $n \geqslant 2$.

Dla gier dwuosobowych z wypłatami danymi przez parametry $T, R, P, S$ pokusa występuje, gdy $R < T$. Obawa występuje, gdy $R > S$ i $P > S$. Tak więc w dylemacie więźnia występuje pokusa i obawa, w zamieci śnieżnej jedynie pokusa, a w polowaniu na jelenia jedynie obawa. Można powiedzieć więc, że w grach dwuosobowych „najostrzejszym” dylematem społecznym jest dylemat więźnia, następnie kolejno zamieć śnieżna i polowanie na jelenia.

Wszystkie powyższe spostrzeżenia i wnioski poczyniliśmy bez konieczności odwoływania się do najważniejszego pojęcia w grach strategicznych – równowagi Nasha (RN). Spróbujmy nasze wnioski „dowiązać” do RN.

**Definicja 3.** RN *gry strategicznej* (2) jest to taki wektor strategii $(s_1, \ldots, s_N)$, $s_i \in S_i$, $i = 1, \ldots, N$, że jeżeli każdy gracz gra odpowiadającą mu strategią z tego wektora (tzn. gracz $i$ gra $s_i$), to żaden z graczy nie podwyższy swojej wypłaty, jeżeli jako jedyny zmieni strategię $s_i$ na dowolną strategię $\tilde{s}_i \in S_i$:

$$u_i((s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n)) \geqslant u_i((s_1, \ldots, \tilde{s}_i, \ldots, s_n))$$

(są to tzw. RN w strategiach czystych).

Zobaczmy, jak wyglądają takie RN dla trzech omówionych gier $N$-osobowych.

**Stwierdzenie 3.** *W Przykładach* 4, 5, 6 *jedyną* RN *jest wektor strategii* (D, …, D).

*Dowód.* W każdej z tych gier z definicji funkcji wypłat widać, że $P_{\mathrm{D}}(0) > P_{\mathrm{C}}(1)$, czyli że $(\mathrm{D}, \ldots, \mathrm{D})$ jest RN. Dla $n > 0$ zachodzi $P_{\mathrm{C}}(n) < P_{\mathrm{D}}(n-1)$: C-gracz podwyższy swoją wypłatę, zmieniając strategię na D, a zatem jest to jedyna RN. □

Wykazaliśmy, że gry z Przykładów 4, 5, 6 to dylematy społeczne. W szczególności, zgodnie z Aksjomatem 1, gdyby wszyscy grali C, mieliby lepiej niż w RN (jedynej, jak przed chwilą udowodniliśmy) dla każdej z tych gier: $P_{\mathrm{C}}(N) > P_{\mathrm{D}}(0)$. Wektor strategii $(\mathrm{C}, \ldots, \mathrm{C})$ nie jest jednak RN w żadnej z nich. Nie jest to prawda dla innych gier będących dylematami społecznymi. Na przykład, dla $N = 2$ w grze polowanie na jelenia wektor strategii $(\mathrm{C}, \mathrm{C})$ jest RN! [ale nie jedyną: drugą RN w strategiach czystych jest $(\mathrm{D}, \mathrm{D})$].

Jak sobie radzić z dylematami społecznymi, aby wynikiem interakcji między graczami była współpraca? Jednym z rozwiązań jest wprowadzenie do gry strategicznej nowych elementów, które promują wybór współpracy jako strategii społecznie pożądanej. Może to być, na przykład, uwzględnienie aspiracji graczy, wprowadzenie interakcji wielokrotnych (gry powtarzalne), usytuowanie gry na grafach, w których gracze – węzły sieci – oddziałują jedynie z graczami ze swojego otoczenia, wprowadzenie niemonetarnych motywacji wyboru strategii, uwzględnienie reputacji graczy itp. Te i podobne idee są obecnie tematami wielu prac naukowych, zarówno o charakterze matematycznym, jak i aplikacyjnym.