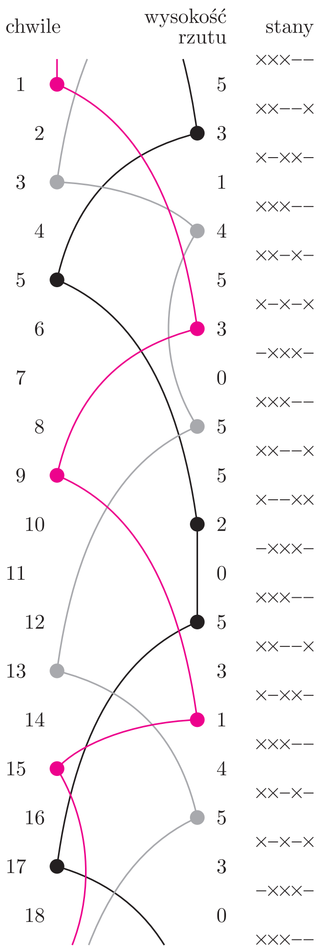
Matematyka żonglowania

Denis KUPERBERG[*]

Żonglerka to starożytna sztuka, jej początki wydają się dorównywać wiekiem ludzkości, znane są np. rysunki żonglującej kobiety znalezione w egipskim grobowcu datowanym na XII wiek p.n.e. Wystarczy kilka kamieni i trochę praktyki, nie jest więc wcale zdumiewające, że ludzie zaczęli się tym zajmować bardzo dawno.

Jednakże dopiero bardzo niedawno zaczęto się interesować matematycznymi aspektami żonglowania. Pierwszy raz matematyczną notację dla wzorców żonglowania wprowadzono w latach 80. XX wieku niezależnie na Uniwersytecie Kalifornijskim w Santa Cruz, w Caltech i na uniwersytecie w Cambridge. Przedstawię tutaj krótki opis tego, jak matematycy mogą pomóc żonglerom w tworzeniu wzorców żonglerki i jak ta międzydziedzinowa współpraca może przydać się również matematykom.

Pierwszy krok to stworzenie schematycznego modelu po to, by móc o żonglowaniu mówić precyzyjnie. Załóżmy (na początek), że czas jest dyskretny, czyli jest ciągiem chwil $1, 2, 3, \ldots$, oraz że żongler ma dwie ręce, z których każda może trzymać w danej chwili co najwyżej jeden przedmiot (piłkę). Ręce poruszają się na zmianę, to znaczy jedna z nich łapie i rzuca piłkę w chwilach parzystych, a druga w nieparzystych.



Rys. 1

Ciekawszą rzeczą są różne sposoby rzucenia piłki – my możemy to opisać wyłącznie poprzez czas (liczbę *chwil*), który piłka spędza w powietrzu. To znaczy rzut *wysokości* t wykonany w chwili i ląduje w chwili $i+t$. Zauważmy, że znaczy to, iż wszystkie rzuty parzystej wysokości lądują w tej samej ręce, która je wyrzuciła, a te o wysokości nieparzystej zmieniają rękę. Oznaczymy przez 0 pusty rzut, to znaczy ręka wykonuje rzut 0 w chwili i, jeśli jest ona wolna w chwili i.

Na rysunku 1 przedstawiony jest przykład sekwencji rzutów. Każda piłka jest identyfikowana przez swój kolor; dodatkowa informacja (stan) będzie przydatna w dalszej analizie. Zauważmy, że żongler używa trzech piłek.

Przedstawiona szczególna sekwencja będzie opisana tylko przez ciąg wykonanych rzutów, czyli – jak widać – 531453055205314530. Taką notację z angielskiego nazywamy *siteswap*. Żonglerzy zazwyczaj interesują się prostszymi sekwencjami aniżeli zaprezentowana tutaj. Szczególną uwagą darzone są sekwencje *okresowe*, w których skończony ciąg rzutów może być powtarzany w nieskończoność. Na przykład pierwszym wzorcem, którego uczy się większość ludzi, to ten z trzema piłkami, zwany *kaskadą*; odpowiada on ciągowi 33333 . . . .

Aby uniknąć powtarzania zbędnej informacji, zazwyczaj zapisujemy sekwencję okresową podając jedynie jej jeden okres, czyli w przypadku kaskady po prostu (3).

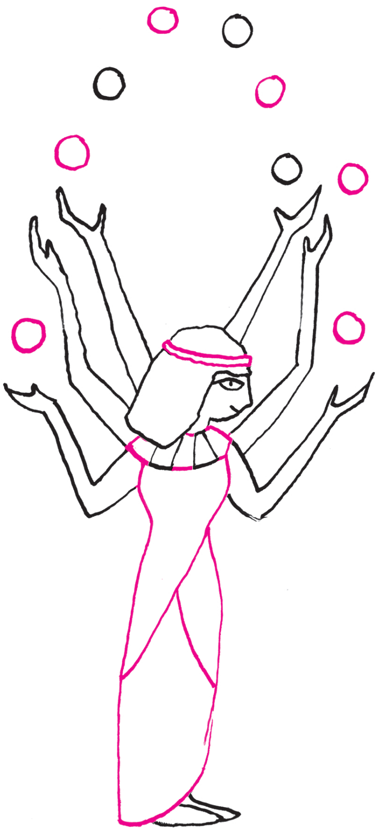
Matematyczny umysł może tu postawić wiele pytań. Czy wszystkie wzorce są poprawne? Jak liczba piłek zależy od wzorca? Ile wzorców istnieje przy pewnych ustalonych ograniczeniach (jak liczba piłek i maksymalna wysokość rzutu)?

Przyjrzyjmy się kilku podstawowym własnościom wzorców siteswap.

Definicja. Wzorzec $t_0 \ldots t_{k-1}$ dla $k \geqslant 1$ nazwiemy *poprawnym* wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma : \{0, 1, \ldots, k-1\} \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ zdefiniowana jako $\sigma(i) = i + t_i \pmod{k}$ jest permutacją. Wszystkie wzorce dla $k = 1$ są poprawne; wzorzec (n) odpowiada kaskadzie n piłek.

Ta definicja po prostu wyraża w inny sposób fakt, że dwie piłki nie mogą wylądować w tym samym momencie. Innymi słowy, różne rzuty we wzorcu muszą lądować w różnych chwilach.

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Lemat. *W poprawnym wzorcu dla n piłek średnia wysokość rzutów wynosi n.*

Dowód pozostawiam jako ćwiczenie-prezent dla Czytelnika lubiącego wyzwania.

Fakt opisany w lemacie może być użyty jako wstępny test na poprawność wzorca: jeśli średnia wysokość nie jest liczbą naturalną, to wzorzec nie może być poprawny.

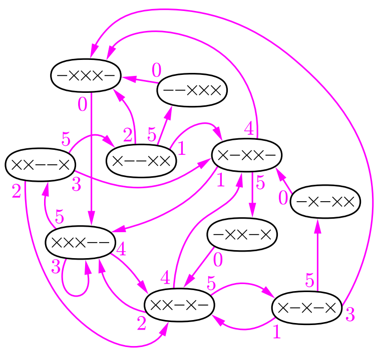
Przykłady:

- (521) ma średnią 8/3, więc nie jest poprawnym wzorcem.
- (321) ma średnią 2, więc mógłby opisywać wzorzec dla dwóch piłek; jednakże pierwszy warunek nie jest spełniony: $\sigma(0) = \sigma(1) = \sigma(2) = 0$, czyli wszystkie piłki lądują w tym samym momencie.
- (441), (531), (55500) są poprawnymi wzorcami dla trzech piłek. (6451), (7333), (71) są poprawnymi wzorcami dla czterech piłek.

Benoît Guerville udowodnił interesujący, nietrywialny fakt.

Twierdzenie o reorganizacji. *Każdy ciąg liczb naturalnych o średniej będącej liczbą naturalną można poprzestawiać tak, by przedstawiał poprawny wzorzec.*

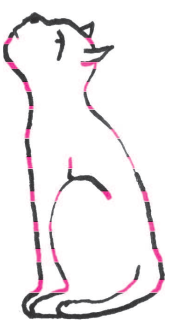
Powróćmy do rysunku 1. Chcę objaśnić to, co zostało umieszczone w kolumnie *stany*. W każdej chwili możemy spojrzeć na wysokość danej piłki, tzn. czas od danego momentu do jej wylądowania. Ponieważ dwie piłki nigdy nie lądują w tej samej chwili, więc wszystkie wysokości będą różne. Będziemy je zapisywać od lewej do prawej, znak × oznacza, że jest piłka, a znak –, że jej nie ma. W szczególności, pierwszy symbol z lewej strony odpowiada wysokości 0, czyli aktualnie aktywnej ręce. Opis stanu kończy się na maksymalnej wysokości (w przykładzie to 5), więc opis stanów jest skończony. Ograniczamy też wszystkie rzuty do tej maksymalnej wysokości. To znaczy, że jeśli stan zaczyna się znakiem –, to aktualna ręka jest pusta i następny rzut to 0. Przy czym, jeśli jest tam ×, to piłka może być rzucona na dowolną pozycję zaznaczoną –, czyli odpowiadającą wolnemu miejscu. Maksymalny rzut jest zawsze dozwolony, gdyż odpowiada wirtualnemu – za ostatnią pozycję. Wtedy wszystkie symbole są przesuwane w lewo, co obrazuje upływającą jednostkę czasu. Używając stanów, zawsze wiemy, jakie rzuty są dozwolone, co może być zilustrowane przez automat: diagram stanów-przejść, taki jak na rysunku 2, gdzie są trzy piłki, a maksymalna wysokość to 5.



Rys. 2

A zatem poprawne ciągi to etykietowania ścieżek w tym automacie, a okresowe wzorce odpowiadają cyklom. To spojrzenie może być użyte do definiowania egzotycznych wzorców żonglowania i niektórzy artyści (na przykład firma *Gandini Juggling*) szeroko używają wzorców przy projektowaniu układów na swoje pokazy.

Zauważmy, że matematyczne rezultaty nigdzie nie wykorzystywały faktu, iż występują akurat dwie ręce. Wszystkie rozumowania będą wciąż poprawne dla większej liczby żonglujących „stron" (stóp, głowy, wielu osób, ...). Badania nad wzorcami siteswap trwają, uogólnia się to pojęcie na wiele sposobów: dla czasu synchronicznego (wiele rąk rzuca w tym samym momencie), multipleksów (jedna ręka może rzucać wiele piłek naraz), ...



Rozważania te doprowadziły także do bardziej abstrakcyjnych badań naukowych, zostało opublikowanych wiele artykułów na ten temat, w większości o kombinatoryce wzorców. Interesujący jest fakt, że pewne pomysły rozwinięte podczas studiowania żonglowania były użyte w innych dziedzinach matematyki. Wiele artykułów, a czasem nawet prace doktorskie (np. *Combinatorial aspects of juggling* Anthony'ego Maysa) wskazują związki wzorców siteswap z nowatorskimi rozwiązaniami w matematyce. Nie ma takich rzeczy jak bezużyteczna matematyka: wzajemne powiązania często pojawiają się przy najbardziej niewinnych tematach!

Tłumaczył Wojciech CZERWIŃSKI

Rysunki do artykułu zostały zaadaptowane z Wikipedii.