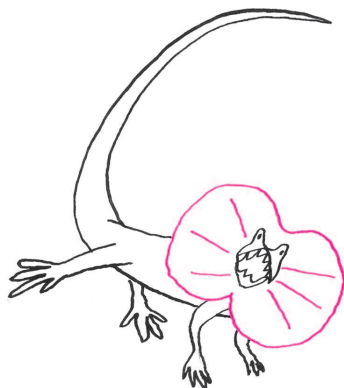


Czytelników zainteresowanych bardziej szczegółowym opisem zachęcamy do przeczytania piątego rozdziału książki *Wprowadzenie do biomatematyki* autorstwa J.D. Murraya.

Moglibyśmy także pokusić się o zastosowanie modelu ciągłego – wówczas czas nie byłby reprezentowany przez ciąg oddalonych od siebie punktów, ale przez półprostą rzeczywistą. Takie przybliżenie jest uprawnione, jeśli czas obserwacji jest dostatecznie długi w stosunku do czasu między kolejnymi obserwacjami. Na przykład, jeśli obserwacje prowadzilibyśmy na przestrzeni kilku lat, a stan emocjonalny każdego z partnerów notowalibyśmy co 15 minut, albo obserwacje byłyby prowadzone przez miesiąc, ale stan emocjonalny każdego z partnerów byłby notowany co kilka sekund.



Skorzystaliśmy tutaj ze wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego.

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla drugiego równania układu (1) i wywnioskować, że  $|r_2| < 1$ .

Wydaje się, że nie ma rzeczy mniej logicznych niż uczucia. Czasami trwałe i szczęśliwe związki tworzą ludzie, o których mało kto by wcześniej powiedział, że są dla siebie stworzeni. Z drugiej strony, niejednokrotnie idealne, zdawałoby się, pary rozpadają się po pewnym czasie. W jaki sposób możemy więc przewidzieć dynamikę danego związku? Czy początkowy zachwyt drugą osobą będzie się umacniał, czy wręcz przeciwnie – zmieni się w niechęć? Na te pytania czasem trudno odpowiedzieć psychologom, a w zachowaniu partnerów niejednokrotnie trudno doszukać się logiki. Wydaje się, że angażowanie opartej na logice matematyki do tak trudnego i pozornie nieściśłego problemu jest skazane na porażkę. Okazuje się jednak, że „królowa nauk” nawet w takiej sytuacji jest w stanie wcisnąć swoje trzy grosze.

Opiszę tutaj badania przeprowadzone przez grupę amerykańskiego psychologa Johna Gottmana w latach osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku. Pierwszy problem, przed którym stanęli badacze, to pytanie, w jaki sposób za pomocą liczb opisać emocje. W badaniach uczestniczyły 73 pary. Obserwowano ich zachowanie podczas rozmów na różne, budzące emocje tematy (takie jak pieniądze, teściowie, itp.) i zliczano zachowania „pozytywne” (np. humor, szczery uśmiech) i „negatywne” (np. krytyka, agresja). W ten sposób, po każdej takiej rozmowie otrzymywano liczbę będącą różnicą liczby zachowań „pozytywnych” i „negatywnych”, która w jakiś sposób opisywała stan emocjonalny każdego z partnerów.

Postaramy się teraz opisać zmiany stanów emocjonalnych partnerów za pomocą modelu matematycznego. Użyjemy modelu dyskretnego, czyli takiego, w którym stan procesu (tutaj stan emocjonalny każdego z partnerów) jest opisany tylko w pewnych oddalonych w czasie momentach. Dłuższą rozmowę warto arbitralnie podzielić na rundy i wydaje się, że kolejne wypowiedzi każdego z partnerów doskonale nadają się do tego, by po nich zapisać stan emocjonalny rozmówców.

Oznaczmy przez  $Z_t$  stan emocjonalny żony, a przez  $M_t$  stan emocjonalny męża po  $t$  rundach. Przyjmijmy także, że to żona rozpoczyna rozmowę. Stan emocjonalny partnerów będzie zmieniał się w czasie i będzie opisany ciągiem liczb  $Z_1, M_1, Z_2, M_2, \dots$ . Przyjmijmy jeszcze jedno założenie: stan emocjonalny partnera po kolejnej rundzie zależy zarówno od jego aktualnego stanu emocjonalnego, jak i od stanu emocjonalnego drugiego z partnerów. Niech ten wpływ opisują pewne funkcje  $f$  i  $g$  – ich postać ustalimy później. A zatem stan emocjonalny partnerów opisujemy następującym układem równań:

$$Z_{t+1} = f(Z_t, M_t), \quad M_{t+1} = g(Z_{t+1}, M_t).$$

Z funkcji  $f$  i  $g$  wydzielimy część niezależną od drugiego partnera. Bez wpływów zewnętrznych nasze emocje zwykle ulegają wyciszeniu i osiągamy pewien stan równowagi wewnętrznej (który może być różny dla różnych osób – jedni są nastawieni bardziej pozytywnie do życia, inni mniej). Ten składnik najłatwiej jest modelować przez równanie liniowe. Przyjmijmy zatem, że gdyby obok nie było drugiego z partnerów, to stan emocjonalny zmieniałby się zgodnie z równaniem liniowym

$$(1) \quad Z_{t+1} = r_1 Z_t + a, \quad M_{t+1} = r_2 M_t + b.$$

Przyjrzyjmy się zachowaniu rozwiązań jednego z powyższych równań. Mamy  $Z_1 = r_1 Z_0 + a$ , następnie  $Z_2 = r_1 Z_1 + a = r_1(r_1 Z_0 + a) + a = r_1^2 Z_0 + (r_1 + 1)a$  oraz  $Z_3 = r_1^3 Z_0 + (r_1^2 + r_1 + 1)a$ . Stąd możemy wywnioskować

$$Z_t = r_1^t Z_0 + a \cdot \frac{1 - r_1^t}{1 - r_1}.$$

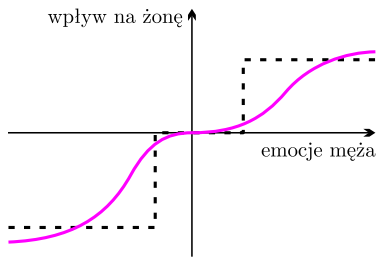
Jeśli  $|r_1| < 1$ , to wówczas ciąg  $Z_t$  będzie zbliżał się do  $a/(1 - r_1)$ , czyli stan emocjonalny osoby będzie się ustalał. Z drugiej strony, jeśli  $|r_1| > 1$ , to ciąg nie będzie zbieżny i wartości  $Z_t$  będą, co do modułu, coraz większe. Taką osobę, której emocje „nakręcają” się same z siebie, trudno uznać za zdrową psychicznie. Przyjmiemy zatem, że  $|r_1| < 1$  oraz  $|r_2| < 1$ .

Do równań (1) dodajmy wpływ męża na żonę (i odwrotnie). Otrzymamy model

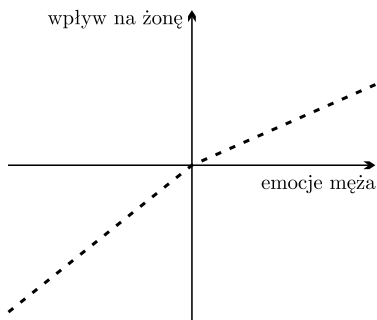
$$(2) \quad Z_{t+1} = W_{MZ}(M_t) + r_1 Z_t + a, \quad M_{t+1} = W_{ZM}(Z_{t+1}) + r_2 M_t + b.$$

Pozostaje nam w jakiś sposób zdefiniować funkcje wpływu męża na żonę  $W_{MZ}(M_t)$  i żony na męża  $W_{ZM}(Z_{t+1})$ . Spróbujmy wyobrazić sobie, jak taka funkcja mogłaby wyglądać. Z odbiorem pozytywnych sygnałów wysyłanych przez partnera jest podobnie jak ze słodzeniem herbaty. Jeśli do herbaty wsypimy za mało cukru, to nie pocujemy,

\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Przykładowa, „idealna” funkcja wpływu męża na żonę (kolorowa linia ciągła) i bardzo uproszczona (linia przerywana).



Funkcja wpływu męża na żonę użyta przez Gottmana.

Punkt stacjonarny nazywa się czasem także *punktem równowagi*, *stanem stacjonarnym* lub *stanem równowagi*.

że posłodziliśmy napój. Z drugiej strony, jeśli wsypimy do jednej szklanki bardzo dużo cukru (powiedzmy pięć łyżeczek), a do drugiej niewiele więcej (dajmy na to pięć i pół), to różnicy w słodkości napojów w tych dwóch szklankach nie wyczuwamy. Zatem funkcja wpływu powinna zmieniać się wolno dla małych wartości emocji (pozytywnych czy negatywnych), potem powinna zmieniać się szybciej, a następnie tempo jej zmian powinno zwalniać. Przykład takiej funkcji narysowaliśmy na rysunku obok kolorową linią ciągłą. Choć funkcja opisująca odpowiedź na emocje negatywne powinna mieć podobny przebieg, nie musi być ona odbiciem symetrycznym wpływu emocji pozytywnych. Łatwo sobie wyobrazić osobę, która gwałtowniej reaguje na krytykę niż na pochwały lub odwrotnie. Taka „idealna” funkcja ma jednak podstawową wadę: jej kształt nie jest łatwy do opisanie, szczególnie jeśli chcemy ją dopasować do danych doświadczalnych (choć, oczywiście, nie jest to niemożliwe). Konstruując model, staramy się uprościć opis sytuacji na tyle, na ile to jest możliwe. Pewnym pomysłem na uproszczenie tej „idealnej” funkcji jest rozpatrzenie funkcji kawałkami stałej (przerywana linia na rysunku). Wówczas zakładamy, że do pewnego momentu partnerzy nie reagują na sygnały drugiej strony, a następnie ich reakcja jest stała.

W swoich badaniach Gottman poszedł jednak inną drogą – przybliżył „idealną” funkcję przez funkcję kawałkami liniową (na dolnym obrazku). To podejście ma tę zaletę, że otrzymana funkcja jest ciągła i opisana jedynie przez dwa parametry: nachylenie prostej na prawo od zera i nachylenie prostej na lewo od zera. A zatem każda z funkcji wpływu będzie opisana dwoma parametrami i będą one dane wzorami:

$$W_{MZ}(M_t) = \begin{cases} \alpha_{MZ} M_t & \text{jeśli } M_t \geq 0, \\ \beta_{MZ} M_t & \text{jeśli } M_t < 0, \end{cases} \quad W_{ZM}(Z_t) = \begin{cases} \alpha_{ZM} Z_t & \text{jeśli } Z_t \geq 0, \\ \beta_{ZM} Z_t & \text{jeśli } Z_t < 0. \end{cases}$$

Zanim krótko omówię wyniki badań grupy Gottmana, zastanówmy się, jakie własności matematyczne ma model (2), gdy funkcje wpływu są kawałkami liniowe. Interesujące jest pytanie, czy istnieją punkty, w pobliżu których wzajemne emocje mogą się ustabilizować, lub w których emocje nie będą się zmieniać. Czyli jeśli  $Z_1 = \bar{Z}$ , a  $M_1 = \bar{M}$ , to dla wszystkich  $t > 0$  pozostanie prawdą, że  $Z_t = \bar{Z}$  i  $M_t = \bar{M}$ . Punkt  $(\bar{Z}, \bar{M})$  o takiej własności nazywa się *punktem stacjonarnym* układu równań (2). Aby znaleźć punkty stacjonarne wykorzystujemy to, że  $Z_t = \bar{Z}$  i  $Z_{t+1} = \bar{Z}$  i podobnie  $M_t = \bar{M}$  i  $M_{t+1} = \bar{M}$ , oraz równanie (2) i otrzymujemy układ równań:

$$(3) \quad \bar{Z} = \frac{1}{1-r_1} W_{MZ}(\bar{M}) + \frac{a}{1-r_1}, \quad \bar{M} = \frac{1}{1-r_2} W_{ZM}(\bar{Z}) + \frac{b}{1-r_2}.$$

Ponieważ funkcje wpływu są kawałkami liniowe, to układ równań (3) jest kawałkami liniowy i moglibyśmy go rozwiązać analitycznie. Jednak ciekawiej i prościej będzie spojrzeć na rozwiązanie tego układu geometrycznie. Zauważmy, że jeśli narysujemy prawe strony równań (3) na płaszczyźnie  $(\bar{Z}, \bar{M})$ , to ich przecięcia wyznaczą punkty stacjonarne. Czynniki  $1/(1-r_1)$  i  $1/(1-r_2)$  skalują funkcje wpływu (nachylenia półprostych stają się mniejsze lub większe). Składnik  $a/(1-r_1)$ , opisujący stan, do którego zbliżają się emocje żony pozbawione wpływu jej męża, przesuwają wykres tak, że przecina on oś  $Z$  właśnie w tym punkcie. Podobnie, składnik  $b/(1-r_2)$  przesuwają wykres wzdłuż osi  $M$ . Skoro umiemy już wyznaczyć stany stacjonarne, to teraz zbadajmy, jak zachowują się rozwiązania w okolicy tych stanów. Jeśli punkt startowy znajduje się w pobliżu stanu stacjonarnego, to badamy, czy rozwiązanie będzie się (w dłuższej perspektywie) do niego zbliżać (mówimy wtedy, że stan stacjonarny jest *asymptotycznie stabilny*), czy też oddali się od niego (powiemy wtedy, że punkt stacjonarny jest *niestabilny*). W pobliżu stanu stacjonarnego układ równań (2) przyjmuje postać

$$(4) \quad Z_{t+1} = \gamma_1 M_t + r_1 Z_t + a, \quad M_{t+1} = \gamma_2 Z_{t+1} + r_2 M_t + b,$$

gdzie  $\gamma_1$  jest równe  $\alpha_{MZ}$ , jeśli  $\bar{M} > 0$  i  $\beta_{MZ}$ , jeśli  $\bar{M} < 0$ . Podobnie,  $\gamma_2$  jest równe  $\alpha_{ZM}$ , jeśli  $\bar{Z} > 0$  i  $\beta_{ZM}$ , jeśli  $\bar{Z} < 0$ . Żeby zobaczyć, co się dzieje w pobliżu stanu stacjonarnego, wprowadzimy nowe zmienne  $z_t$  i  $m_t$ , opisujące odchylenie od stanu stacjonarnego. Mamy:

$$Z_t = \bar{Z} + z_t, \quad M_t = \bar{M} + m_t.$$

Wstawiając te równości do równania (4) i wykorzystując fakt, że spełnione są równania (3), otrzymujemy

$$(5) \quad z_{t+1} = r_1 z_t + \gamma_1 m_t, \quad m_{t+1} = \gamma_2 z_{t+1} + r_2 m_t.$$

Wstawiając pierwsze równanie (5) do drugiego (by pozbyć się  $z_{t+1}$ ), otrzymujemy

$$(6) \quad z_{t+1} = r_1 z_t + \gamma_1 m_t, \quad m_{t+1} = r_1 \gamma_2 z_t + (\gamma_1 \gamma_2 + r_2) m_t.$$



### Rozwiązanie zadania M 1431.

Zalóżmy, że  $n$  kul o promieniach  $r_1, \dots, r_n$  spełnia podaną własność (pokrywa wszystkie ściany  $P$ ). Wówczas  $\sum_{i=1}^n 4\pi r_i^2 \geq S$ , gdzie  $S$  to pole powierzchni bocznej  $P$ . Ponadto

$$V = \frac{4}{3} \pi \sum_{i=1}^n r_i^3. \text{ Stosując nierówność}$$

Höldera do ciągów  $(r_1^2, \dots, r_n^2), (1, \dots, 1)$  i wag  $2/3, 1/3$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} n^{1/3} \left( \frac{3V}{4\pi} \right)^{2/3} &= n^{1/3} \left( \sum_{i=1}^n (r_i^2)^{3/2} \right)^{2/3} \\ &\geq \sum_{i=1}^n r_i^2 \geq \frac{S}{4\pi}, \end{aligned}$$

skąd

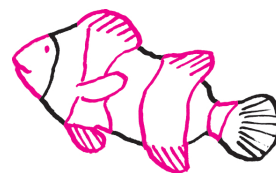
$$n \geq \left( \frac{S}{4\pi} \right)^3 \left( \frac{4\pi}{3V} \right)^2 = \frac{S^3}{36\pi V^2},$$

więc wystarczy przyjąć  $c(P) = \frac{S^3}{36\pi}$ .

Jest to standardowa technika rozwiązywania liniowych równań rekurencyjnych, takich jak (6).

Poszukajmy teraz rozwiązań (6) postaci

$$(7) \quad z_t = z_0 \lambda^t \quad \text{i} \quad m_t = m_0 \lambda^t.$$



Wstawiając do (6) i przekształcając, otrzymujemy układ równań

$$(r_1 - \lambda)z_0 + \gamma_1 m_0 = 0, \quad r_1 \gamma_2 z_0 + (\gamma_1 \gamma_2 + r_2 - \lambda)m_0 = 0.$$

Aby ten układ miał niezerowe rozwiązania (a właściwie nieskończenie wiele niezerowych rozwiązań), potrzebujemy, aby stosunek współczynnika przy  $z_0$  do współczynnika przy  $m_0$  był taki sam w obu równaniach. Zatem musi zachodzić

$$(r_1 - \lambda)(\gamma_1 \gamma_2 + r_2 - \lambda) = r_1 \gamma_1 \gamma_2,$$

czyli

$$(8) \quad \lambda^2 - (r_1 + r_2 + \gamma_1 \gamma_2)\lambda + r_1 r_2 = 0.$$

Ponieważ rozwiązania są postaci (7), to aby zbliżały się do zera (czyli  $Z_t$  i  $M_t$  do  $\bar{Z}$  i  $\bar{M}$ ), potrzebujemy, by rozwiązania równania (8) były co do modułu mniejsze od jedynki.

**Stwierdzenie 1.** Niech  $|r_1|, |r_2| < 1$ . Jeżeli  $r_1 r_2 < 0$  lub  $\gamma_1 \gamma_2 > 2\sqrt{|r_1 r_2|} - (r_1 + r_2)$ , to rozwiązania  $\lambda_1, \lambda_2$  równania (8) są rzeczywiste i jeśli dodatkowo

$$(9) \quad \frac{\gamma_1}{1 - r_1} \cdot \frac{\gamma_2}{1 - r_2} < 1,$$

to  $|\lambda_1| < 1$  i  $|\lambda_2| < 1$ .

**Dowód.** Obliczmy najpierw wyróżnik równania kwadratowego (8)

$$\Delta = (r_1 + r_2 + \gamma_1 \gamma_2)^2 - 4r_1 r_2.$$

Jeśli  $r_1 r_2 < 0$ , to oczywiście  $\Delta > 0$ . Podobnie, jeśli  $\gamma_1 \gamma_2 > 2\sqrt{|r_1 r_2|} - (r_1 + r_2)$ , to  $\Delta > 0$ . Aby przekonać się, że stwierdzenie jest prawdziwe, musimy wykazać, że większy co do modułu pierwiastek równania (8) jest mniejszy od 1 lub większy od  $-1$ .

Przypuśćmy, że  $r_1 + r_2 + \gamma_1 \gamma_2 > 0$ . Wówczas większym co do modułu pierwiastkiem jest ten z plusem przy  $\sqrt{\Delta}$ . Zatem musimy wykazać, że

$$(10) \quad \sqrt{\Delta} < 2 - (r_1 + r_2 + \gamma_1 \gamma_2).$$

Zauważmy, że nierówność (9) możemy zapisać jako

$$\gamma_1 \gamma_2 < 1 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2 < 2 - (r_1 + r_2).$$

To dowodzi, że prawa strona nierówności (10) jest dodatnia i możemy nierówność podnieść stronami do kwadratu, co po skróceniu wyrazów sprowadzi ją do założonej nierówności (9).  $\square$

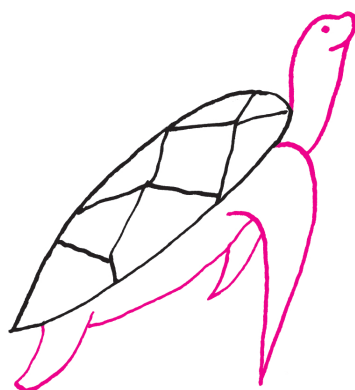
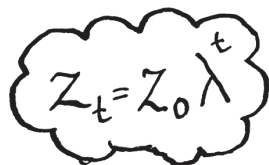
**Uwaga 2.** Zauważmy, że jeśli  $r_1 > 0$  i  $r_2 > 0$ , to

$$2\sqrt{|r_1 r_2|} - (r_1 + r_2) = -(\sqrt{|r_1|} - \sqrt{|r_2|})^2 < 0.$$

Zatem dla dodatnich  $r_1, r_2, \gamma_1$  i  $\gamma_2$ , teza Stwierdzenia 1 jest spełniona.

Gottman ze swoim zespołem na podstawie obserwacji wyznaczył dla każdej z par kąty nachylenia funkcji wpływu oraz wielkości  $r_1, r_2, a$  i  $b$ . Następnie wyznaczono stany stacjonarne i ich stabilność. Okazało się, że położenie stabilnego stanu stacjonarnego ma kluczowe znaczenie. Dla par zakwalifikowanych wcześniej przez psychologów jako pary wysokiego ryzyka (zagrożone rozpadem związku) przynajmniej jedna ze współrzędnych stabilnego stanu stacjonarnego była ujemna, a druga była bliska zera lub także ujemna. Dla par niskiego ryzyka stabilny stan stacjonarny znajdował się w pierwszej ćwiartce. Ponadto, wśród badanych osób można było wyróżnić trzy podtypy różniące się nachyleniami funkcji wpływu: wyraźnie dodatnie nachylenie obu liniowych części funkcji wpływu (pozytywna reakcja na pozytywne emocje i negatywna reakcja na negatywne emocje), wyraźnie dodatnie nachylenie prawej części funkcji wpływu (pozytywna reakcja na pozytywne emocje) i bliskie zera nachylenie lewej części funkcji wpływu (słaba reakcja na negatywne emocje) oraz bliskie zera nachylenie prawej części funkcji wpływu (słaba reakcja na pozytywne emocje) i wyraźnie dodatnie nachylenie lewej części funkcji wpływu (negatywna reakcja na negatywne emocje). Pary niskiego ryzyka miały podobne (tego samego typu) funkcje wpływu męża i żony.

Z drugiej strony, funkcje wpływu partnerów z par wysokiego ryzyka zdają się pochodzić z różnych podtypów, czyli są do siebie niedopasowane. To owocuje ujemnym stabilnym stanem stacjonarnym. Wyniki tych badań sugerują hipotezę, że pary, których związek zdąża do rozpadu, nie wypracowały schematu, jak mają na siebie wpływać, a większość ich sporów dotyczy tego, w jaki sposób powinni się klócić czy rozmawiać ze sobą.



Kwalifikację par potwierdziły późniejsze obserwacje tych par.



#### Rozwiązanie zadania M 1430.

Skoro  $NWD(n, k) = an + bk$  dla pewnych liczb całkowitych  $a, b$ , to wystarczy

udowodnić, że liczba  $\frac{k}{n} \binom{n}{k}$  jest całkowita. Wynika to z równości

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$