



Najładniejsza choinka

Przemysław KICIAK*

Najładniejszą choinkę w życiu widziałem na Słowacji, w miejscowości Jasov. Jest tam klasztor założony w XII wieku, a obok niego rośnie sekwoja, a właściwie mamutowiec; drzewo to jest znacznie młodsze niż klasztor, bo ma tylko 180 lat. Uwagę patrzącego przyciąga pień, bardzo gruby przy ziemi i bardzo smukły na samej górze. Kształt pnia (i wszystkich części każdego drzewa) to kwestia swoistej ekonomii; na drzewo działają rozmaite siły, które pień musi wytrzymać, i dlatego musi być dostatecznie gruby. Ale do zbudowania grubego pnia potrzeba bardzo dużo budulca, który trzeba wydobyć z gleby i z powietrza, i energii, otrzymywanej ze Słońca – to po tę energię drzewa „ścigają się do góry”. Im grubszy i wyższy jest pień, tym większe obciążenia musi wytrzymywać, co sprawia, że ten wyścig to nadzwyczaj trudna konkurencja. Mistrzami w niej są mamutowce.

Źródła sił działających na pień choinki to przede wszystkim grawitacja (ciężar samego pnia, gałęzi, igieł, szyszek, opadów atmosferycznych i siadających na gałęziach ptaków), wiatr, powodujący nie tylko zginanie, ale też skręcanie (choć momenty wywieranych przez poszczególne konary sił skręcających pień w znacznym stopniu się znoszą) i wreszcie bezwładność (ojczyzną mamutowców jest Kalifornia, obszar sejsmiczny). Wspomniana „ekonomia” ma na celu jak najlepsze wykorzystanie materiału, co sprowadza się do tego, by przy największych obciążeniach, na jakie pień bywa wystawiony, naprężenia w poszczególnych częściach pnia były bliskie wytrzymałości drewna, z którego pień jest zbudowany. W tym artykule chciałbym pokazać, jak z tak postawionego problemu „ekonomicznego” wynika rozwiązanie w postaci kształtu pnia. W tym celu zbuduję i zbadam pewien bardzo uproszczony model pnia mamutowca i działających na niego sił wiatru i grawitacji.

To, czy dany materiał wytrzyma obciążenie, zależy od tzw. trójosiowego stanu naprężeń. Na przykład, materiał rozciągany lub ściskany jednakowo we wszystkich kierunkach może wytrzymać większe naprężenie niż materiał rozciągany lub ściskany tylko w jednym kierunku. Ważne są też kierunkowe własności materiału: sztywność i wytrzymałość drewna rozciąganego wzdłuż włókien jest większa niż w kierunkach prostopadłych do włókien, co określa się mianem anizotropii. Na rozkład naprężeń w pniu ma wpływ zależność odkształceń od naprężeń. Dla prawie wszystkich ciał stałych, jeśli naprężenia są dostatecznie małe, zależność ta jest liniowa; jest to znane prawo Hooke’a. Jednak dla większych naprężeń (a zwłaszcza bliskich granicy wytrzymałości materiału) prawo to przestaje obowiązywać. Poza tym w różnych częściach pnia (zależnie od wieku drewna i zawartości wody) zależność ta może być różna. Tych wszystkich rzeczy nie weźmiemy dalej pod uwagę, ale budując model matematyczny czegokolwiek, zawsze należy pamiętać o najważniejszych pominiętych czynnikach (wszystkich nigdy nie znamy).

Przyjmujemy następujące nieprawdziwe (co nie znaczy od razu, że błędne) założenia: w każdym miejscu sztywność i wytrzymałość drewna jest taka sama (korę traktujemy jak drewno). Pień rośnie pionowo, a jego przekrój poziomy na każdej wysokości jest kołem, którego promień wolno zmienia się z wysokością. Grawitacja i zginanie przez wiatr powodują tylko ściskanie i rozciąganie włókien wzdłuż pnia, którego materiał spełnia prawo Hooke’a. Przy tych założeniach wspomniane przekroje pnia pozostają płaskie, tj. cząstki drewna położone na dowolnym poziomym przekroju pnia nieodkształconego po jego obciążeniu nadal znajdują się w jednej płaszczyźnie. Przyjmujemy ponadto, że średnice przekrojów po odkształceniu pnia pozostają niezmiennione.

Wprowadzimy układ współrzędnych, którego oś x jest skierowana pionowo do góry, oś y ma kierunek wiatru, który wieje poziomo, a oś z jest do pozostałych dwóch osi prostopadła. Jeśli H oznacza wysokość pnia, a funkcja $u(x)$ opisuje ugięcie (tj. boczne przemieszczenie przekroju) pnia na wysokości x , gdzie $x \in [0, H]$, to dla niewielkich (z założenia) ugięć promień okręgu ściśle stycznego do wygiętej osi pnia na wysokości x jest w dobrym

*Instytut Matematyki Stosowanej
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

przybliżeniu równy $R(x) = 1/u''(x)$. Jeśli w tym miejscu przekrój pnia ma promień $r(x)$, to maksymalne względne zmiany długości włókien, spowodowane przez wygięcie pnia, są równe $\pm r(x)/R(x) = \pm r(x)u''(x)$. Wprowadźmy w płaszczyźnie przekroju pnia lokalny układ współrzędnych η, ζ , mający początek w środku przekroju i taki, że oś η przed odkształceniem pnia ma kierunek i zwrot osi y . Względne odkształcenie włókna przecinającego przekrój w punkcie (η, ζ) jest proporcjonalne do η . Z prawa Hooke'a wynika, że także naprężenie włókna jest proporcjonalne do η . Naprężenia włókien spowodowane przez zginanie pnia w rozważanym przekroju są zatem opisane przez funkcję

$$\sigma_z(\eta, \zeta) = \sigma_{z \max} \frac{\eta}{r(x)},$$

której wartość dodatnia oznacza, że włókno jest ściskane. Wypadkowy moment siły dla naprężeń w przekroju pnia na wysokości x możemy wyrazić za pomocą całki po kole $K(x)$ – przekroju pnia na tej wysokości; całka ta jest objętością bryły pod wykresem funkcji $\eta\sigma_z(\eta, \zeta)$ (rys. 1), a oblicza się ją tak:

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_{K(x)} \eta \sigma_z(\eta, \zeta) d\eta d\zeta = \int_{K(x)} \frac{\sigma_{z \max}}{r(x)} \eta^2 d\eta d\zeta = \\ &= \frac{\pi}{4} r^3(x) \sigma_{z \max}. \end{aligned}$$

Z otrzymanego wyżej wzoru wynika, że wytrzymałość pnia na zginanie jest proporcjonalna do trzeciej potęgi promienia przekroju. Podobna zależność wytrzymałości od wielkości przekroju ma miejsce również dla belek, których przekroje mają kształt inny niż koło.

Pomińmy chwilowo naprężenia spowodowane przez grawitację, aby znaleźć optymalny kształt pnia ze względu na wytrzymałość na podmuchy wiatru. Siła parcia powietrza na gałąź drzewa zależy od wielkości i kształtu gałęzi i od prędkości wiatru, przy czym dla przepływu turbulentnego, z jakim mamy tu do czynienia, jest proporcjonalna do kwadratu prędkości wiatru. Sprawę komplikuje fakt, że prędkość wiatru nie tylko zmienia się w czasie, ale również zależy od wysokości – zwykle rośnie wraz z odległością od ziemi. Ponieważ górne gałęzie są znacznie krótsze od tych położonych niżej, gdzie prędkość wiatru jest mniejsza, wydaje się, że można (przy braku lepszych informacji) zobaczyć, co wyjdzie, jeśli założymy, że siła parcia wiatru na jednostkę długości (wysokości) pnia jest stała wzdłuż pnia. Oznaczmy tę stałą symbolem F . Wtedy moment siły wiatru zginającej pień na wysokości x jest równy

$$M_1(x) = \int_x^H F(t-x) dt = \frac{1}{2} F(H-x)^2$$

(ta całka jest polem trójkąta, który ma wierzchołek na wysokości x i przeciwny bok na wysokości H , rys. 2). Moment ten jest wypadkowym momentem sił ściskających i rozciągających włókna przekroju: $M_1(x) = M(x)$. Mamy stąd równanie, które wiąże stałą F , promień przekroju $r(x)$ i maksymalne naprężenie spowodowane przez zginanie $\sigma_{z \max}$:

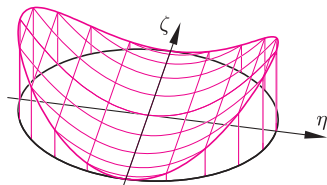
$$(*) \quad r^3(x) = \frac{2F(H-x)^2}{\pi\sigma_{z \max}}.$$

Jeśli założymy, że maksymalne naprężenie spowodowane przez zginanie ma być takie samo na każdej wysokości, to funkcja opisująca promień przekroju będzie mieć postać $r(x) = C(H-x)^{2/3}$, ze stałą $C = \sqrt[3]{2F/(\pi\sigma_{z \max})}$. Zobaczmy wykres (rys. 3): pień mamutowca tak nie wygląda.

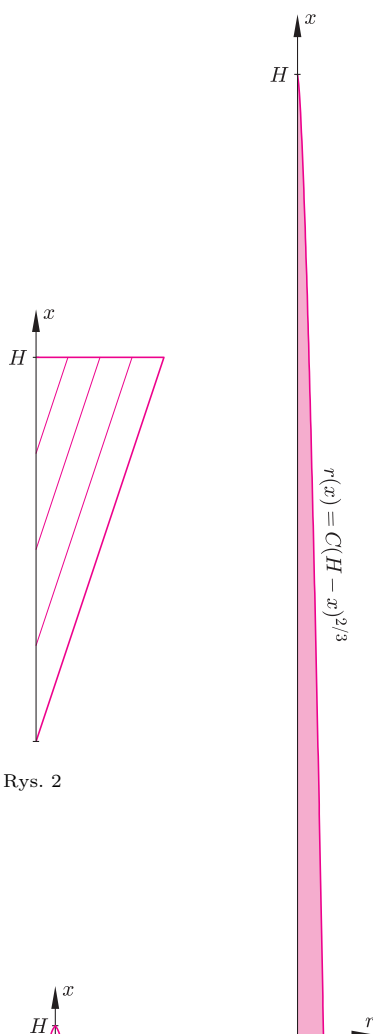
Rozważmy teraz grawitację. Oprócz ciężaru pnia musimy przy tym uwzględnić ciężar gałęzi. W tym celu przyjmiemy kolejne nie całkiem prawdziwe założenie, że rozkład ciężaru gałęzi wyrastających z pnia na wysokości x jest proporcjonalny do pola przekroju pnia na tej wysokości. Przy tym założeniu siła ściskająca pień na wysokości x jest równa

$$(**) \quad S(x) = \int_x^H D r^2(t) dt,$$

gdzie D jest pewną stałą (siła ta jest więc proporcjonalna do objętości części pnia powyżej poziomu x , rys. 4). Zgodnie z założeniami modelu siła ta powoduje

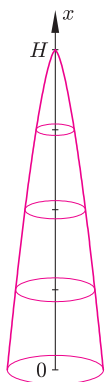


Rys. 1



Rys. 2

Rys. 3



Rys. 4

równomierne naprężenie σ_s w całym przekroju, musi ono zatem być równe

$$(**) \quad \sigma_s(\eta, \zeta) = \frac{S(x)}{\pi r^2(x)}.$$

Naprężenia spowodowane ścisaniem i zginaniem pnia dodają się, zatem skrajne naprężenia (odpowiednio we włóknach rozciąganych i ścisanych) to $\sigma_s - \sigma_{z \max}$ i $\sigma_s + \sigma_{z \max}$. Aby pień wytrzymał obciążenie, oba te naprężenia muszą leżeć w przedziale ograniczonym przez wytrzymałości drewna na rozciąganie i ściskanie wzdłuż włókien. Zwrot siły grawitacji sprawia, że maksymalne naprężenie ścisające ma większą wartość bezwzględną niż rozciągające, dlatego (choć wytrzymałość drewna na ściskanie może być większa niż na rozciąganie) zajmujemy się ścisaniem: chcemy, aby przy najsilniejszym wietrze, na jaki drzewo jest przygotowane, maksymalne naprężenie ścisające w każdym poziomym przekroju pnia było stałe, równe maksymalnej wytrzymałości drewna na ściskanie, którą oznaczymy symbolem σ_{\max} . Zatem, na podstawie (*), (**) i (***) mamy

$$(***) \quad \sigma_{\max} = \sigma_s + \sigma_{z \max} = \frac{D}{\pi r^2(x)} \int_x^H r^2(t) dt + \frac{2F(H-x)^2}{\pi r^3(x)}.$$

Dla wygody przekształcimy to równanie całkowe. Strony równości

$$\int_x^H r^2(t) dt = \frac{\pi r^2(x)}{D} \left(\sigma_{\max} - \frac{2F(H-x)^2}{\pi r^3(x)} \right) = \frac{\pi \sigma_{\max}}{D} r^2(x) - \frac{2F(H-x)^2}{Dr(x)}$$

różniczkujemy względem x :

$$-r^2(x) = \frac{2\pi \sigma_{\max}}{D} r(x)r'(x) + \frac{2F}{Dr(x)} \left(2(H-x) + \frac{(H-x)^2}{r(x)} r'(x) \right).$$

Po uporządkowaniu dostajemy stąd równanie różniczkowe zwyczajne

$$r'(x) = -\frac{Dr^3(x) + 4F(H-x)}{2\pi \sigma_{\max} r^3(x) + 2F(H-x)^2} r(x).$$

Właśnie ono jest matematycznym modelem pnia. Jako że bez dobrej nazwy niepodobna dziś odnieść sukces, nazwałem je Równaniem Mamutowca Kiciaka, w skrócie RóMaK (gdyby w wyprowadzeniu nie było tylu uproszczeń i wątpliwych założeń, nie zawahałbym się nazwać go Równaniem Prawdziwego Mamutowca).

RóMaK przepisemy w postaci

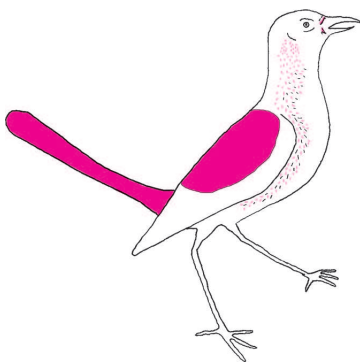
$$r'(x) = -\frac{dr^3(x) + 4f(H-x)}{2\pi r^3(x) + 2f(H-x)^2} r(x),$$

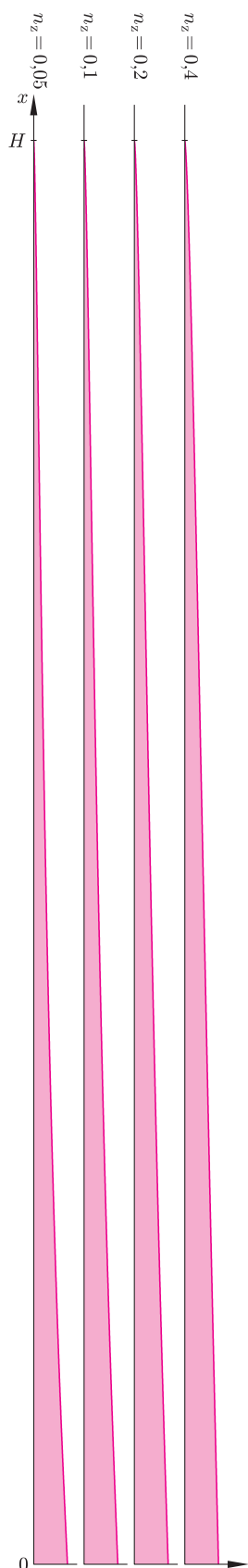
w której $d = D/\sigma_{\max}$, $f = F/\sigma_{\max}$. W ten sposób zmniejszyliśmy liczbę parametrów. Poszukiwane rozwiązania spełniają warunek $r(H) = 0$. Niestety, nie nadaje się on na warunek początkowy – poszukujemy rozwiązań dodatnich w przedziale $[0, H)$, a funkcja zerowa spełnia RóMaK i ten warunek. Polecam uwagę Czytelników sprawdzenie (za pomocą reguły de l'Hôspitala), że dla $d \geq 0$ i $f > 0$ rozwiązanie niezerowe w otoczeniu H , takie że $r(H) = 0$, musi mieć w otoczeniu H nieograniczoną pochodną; taką osobliwość ma np. znaleziona wcześniej funkcja $C(H-x)^{2/3}$, spełniająca RóMaK z parametrem $d = 0$. Jeśli $x_0 < H$ i $r(x_0) > 0$, to funkcja $r(x)$ jest dodatnia (i malejąca) w przedziale $[x_0, H)$.

Będziemy poszukiwać rozwiązań numerycznie, przez rozwiązanie zagadnienia początkowego dla RóMaK, przyjmując warunek początkowy $r(0) = r_0$, gdzie r_0 oznacza promień przekroju pnia przy ziemi. Parametry d i f należy dobrać tak, aby funkcja $r(x)$ jak najlepiej opisywała kształt pnia. W tym szaleństwie jest metoda: jeśli to się uda, to, być może, dowiemy się czegoś o wartościach tych parametrów bez mierzenia ich (co mogłoby być bardzo trudne).

Aby numerycznie rozwiązywać RóMaK, możemy podzielić przedział $[0, H]$ na N części, każda o długości $h = H/N$, a następnie, mając dane r_0 , obliczać kolejno, dla $i = 0, \dots, N-1$,

$$\begin{aligned} k_1 &= hg(ih, r_i), \\ k_2 &= hg\left(\left(i + \frac{1}{2}\right)h, r_i + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= hg\left(\left(i + \frac{1}{2}\right)h, r_i + \frac{1}{2}k_2\right), \\ k_4 &= hg((i+1)h, r_i + k_3), \\ r_{i+1} &= r_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned}$$





Rys. 5

(*) Ocena ta jest niedokładna; znacznie później znalazłem wyniki pomiarów przeprowadzonych w sierpniu 2012. Pień miał wtedy wysokość 47,7 m i obwód 7,42 m na wysokości 1,3 m.

gdzie

$$g(x, y) = -\frac{dy^3 + 4f(H-x)}{2\pi y^3 + 2f(H-x)^2}y.$$

Jest to tzw. metoda Rungego–Kutty czwartego rzędu. Określa ona ciąg liczb r_i , przybliżających wartości funkcji $r(x)$ w punktach ih z dokładnością aż nadto wystarczającą w tym zastosowaniu.

Jak wybierać parametry f i d ? Nie są one niezależne. Oznaczmy wielkości pomocnicze:

$$n_z = \frac{2fH^2}{\pi r_0^3}, \quad n_s = \frac{d}{\pi r_0^2} \int_0^H r^2(t) dt.$$

Na podstawie (**) musi być $n_z + n_s = 1$; wielkości te określają udziały naprężeń powodowanych przez zginanie i ściskanie w maksymalnym naprężeniu w przekroju pnia przy ziemi. Mając dane r_0 i H , możemy wybrać $n_z \in (0, 1)$, obliczyć $f = \pi r_0^3 n_z / (2H^2)$, a następnie, rozwiązując RóMaK dla różnych wartości parametru d , znaleźć taką jego wartość, aby równość $n_z + n_s = 1$ była spełniona. Mamy tu równanie nieliniowe z niewiadomą d , które można rozwiązać np. metodą bisekcji. Obliczając n_s , możemy posłużyć się wzorem przybliżonym

$$\int_0^H r^2(t) dt \approx \frac{H}{2N} \left(r_0^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} r_i^2 + r_N^2 \right)$$

(jest to tzw. złożona kwadratura trapezów).

Pora zatrudnić do obliczeń komputer. Na podstawie zdjęć oceniłem (*) wysokość drzewa na 35 m. Przy ziemi pień ma średnicę około 2,5 m, ale ponieważ okazało się, że model nie jest w stanie odtworzyć zgrubienia pnia na samym dole (o czym dalej), przyjąłem promień $r_0 = 0,95$ m. Wyniki obliczeń z $N = 1000$ dla kilku wartości parametru n_z przedstawiają wykresy na rysunku 5 i tabela:

n_z	n_s	f [m]	d [m ⁻¹]
0,05	0,95	$5,49 \cdot 10^{-5}$	0,3722
0,1	0,9	$1,10 \cdot 10^{-4}$	0,3084
0,2	0,8	$2,19 \cdot 10^{-4}$	0,2371
0,4	0,6	$4,39 \cdot 10^{-4}$	0,1528

We wszystkich tych przypadkach było $r_{N-1} > 0$ i $r_N \approx 0$ (jeśli $r_N > 0$, to parametr d ma za małą wartość). Wydaje się, że najlepsza zgodność z tym, co widać na zdjęciach (patrz strona 2; więcej szczegółów na www.deltami.edu.pl), ma miejsce, gdy n_z jest bliskie 0,1–0,2. Sugeruje to, że naprężenia spowodowane przez grawitację osiągają na dole pnia około 80–90% wytrzymałości drewna, a pozostałe 10–20% to zapas na wypadek silnego wiatru. Na dużych wysokościach dominują naprężenia powodowane przez zginanie.

* * *

Wymyślając założenia i wyprowadzając z nich RóMaK, nie wiedziałem, co z tego wyjdzie. Wyszło nieźle; „nie wyszło” tylko zgrubienie pnia tuż przy ziemi. To oznacza, że założenia nie opisują poprawnie zjawisk zachodzących w tym miejscu pnia. Warto więc jeszcze raz zastanowić się nad nimi. Kora, która w dolnej części pnia jest bardzo gruba, nie przenosi obciążeń tak samo jak drewno, a przekroje pnia nie są okrągłe i po obciążeniu nie pozostają płaskie. Drzewa nie rosną idealnie pionowo i nawet niewielkie odchylenie od pionu (rzędu 1°) może bardzo zmienić rozkład naprężeń. Można też zakwestionować podstawowe założenie, że maksymalne naprężenie na każdej wysokości jest takie samo. Skutki ewentualnego złamania pnia dla drzewa byłyby tym poważniejsze, im niżej by to nastąpiło – gdyby odłamał się tylko czubek, to drzewo nadal mogłoby żyć i wytwarzać nasiona. Z tego powodu prawdziwy pień może być na dole dodatkowo wzmocniony, czyli grubszy, niż to wynika z modelu. Niemniej można dobrać parametry modelu tak, aby funkcja $r(x)$ spełniająca RóMaK całkiem dobrze opisywała kształt prawie całego pnia mamutowca. Ale kto chce, może uznać, że podobieństwo otrzymanego wyniku do choinki z Jasova jest słabe, a to, co ten model opisuje, to nie żaden mamutowiec, tylko lipa.