Elementarnie o twierdzeniu Brouwera

*Jarosław GÓRNICKI**

* Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Tytułowe twierdzenie sformułujemy dla trójkąta (z brzegiem) na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$. Jest to najsłynniejsze i najważniejsze twierdzenie w topologicznej teorii punktów stałych o rozlicznych zastosowaniach (w równaniach różniczkowych, topologii, ekonomii, teorii gier, analizie funkcjonalnej). Jego odkrycie miało ogromny wpływ na rozwój wielu gałęzi matematyki, szczególnie topologii algebraicznej.

Twierdzenie (Luitzen Brouwer, 1912 r.). *Niech $\triangle$ będzie trójkątem i $f : \triangle \to \triangle$ przekształceniem ciągłym. Wtedy istnieje taki punkt $x \in \triangle$, że $f(x) = x$.*

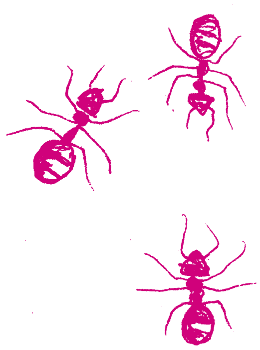
Punktem wyjścia będzie bastępująca kombinatoryczna obserwacja.

O różnych konsekwencjach twierdzenia Brouwera można przeczytać w Δ^{10}_{18}, a o konsekwencjach lematu Spernera w Δ^{3}_{20}.

Lemat 1 (Emanuel Sperner, 1928 r.). *Niech $\triangle$ będzie trójkątem o bokach I, J, K, który jest podzielony siecią trójkątów tak, że dwa trójkąty sieci mogą stykać się wspólnym bokiem lub wspólnym wierzchołkiem. Wierzchołki sieci malujemy kolorem czerwonym, niebieskim lub zielonym (c, n, z) tak, aby każdy wierzchołek leżący w I był czerwony lub niebieski, każdy wierzchołek w J był niebieski lub zielony, a każdy wierzchołek w K był zielony lub czerwony. Wtedy wśród trójkątów sieci istnieje taki, którego wierzchołki są różnych kolorów.*

krawędź skierowana	wartość
cc, nn, zz	0
cn, nz, zc	1
cz, nc, zn	−1

Określmy wartość „oczka” sieci, wędrując w nim przeciwnie do ruchu wskazówek zegara i sumując wartości przyporządkowane krawędziom zgodnie z podaną na marginesie tabelką. Dla trójkąta sieci, którego wierzchołki są różnych kolorów, ta wartość jest równa 3 lub -3. W każdym innym przypadku ta wartość jest równa 0.



Obliczmy sumę wartości wszystkich oczek sieci. Zauważmy, że wkład każdej krawędzi wewnętrznej sieci do całej sumy jest równy 0 (bo krawędź wewnętrzna należy do dwóch trójkątów i wędrujemy po niej w przeciwnych kierunkach), a wkład każdego boku trójkąta $\triangle$ jest równy 1. Zatem suma wartości wszystkich krawędzi sieci trójkąta $\triangle$ jest równa 3. Oznacza to, że nie wszystkie oczka sieci mają wartość 0. Istnieje więc w sieci trójkąt, którego wierzchołki są różnych kolorów.

Topologiczną konsekwencją lematu Spernera jest następująca obserwacja.

Lemat 2. *Niech $\triangle$ będzie trójkątem o bokach I, J, K. Niech A, B, C będą zbiorami domkniętymi takimi, że $I \subset A$, $J \subset B$, $K \subset C$ i $\triangle \subset A \cup B \cup C$. Wtedy $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.*

Zbiór F jest domknięty, jeśli dla dowolnego zbieżnego ciągu elementów F granica tego ciągu również należy do F.

Jeżeli trójkąt $\triangle$ zawiera się w sumie dwóch zbiorów z rodziny $\{A, B, C\}$, to teza jest spełniona. Załóżmy, że trójkąt $\triangle$ nie zawiera się w sumie dwóch zbiorów z rodziny $\{A, B, C\}$. Dla każdego $i \geqslant 2$ dzielimy boki trójkąta $\triangle$ na i równych części, a łącząc je liniami równoległymi do boków trójkąta, otrzymujemy sieć i-tego rzędu. Każdy wierzchołek x w i-tej sieci malujemy na dowolny dopuszczalny kolor, który określa przynależność punktu x do zbiorów z rodziny $\{A, B, C\}$. Możemy to uczynić w taki sposób, aby wszystkie wierzchołki sieci w I były czerwone lub niebieskie, w J były niebieskie lub zielone, w K były zielone lub czerwone. W każdej takiej sieci (lemat 1) istnieje trójkąt o wierzchołkach w różnych kolorach: c_i, n_i, z_i. Twierdzenie Bolzano–Weierstrassa zapewnia istnienie podciągu zbieżnego $c_{i_j} \to \xi$. Ponieważ średnice trójkątów kolejnych sieci dążą do 0, więc $n_{i_j} \to \xi$ i $z_{i_j} \to \xi$. Skoro $c_{i_j} \in A$, $n_{i_j} \in B$, $z_{i_j} \in C$ oraz A, B, C są zbiorami domkniętymi, więc $\xi \in A \cap B \cap C$.

Symbol ∂ oznacza brzeg, czyli $\partial\triangle$ oznacza brzeg trójkąta $\triangle$ złożony z trzech odcinków $I \cup J \cup K$.

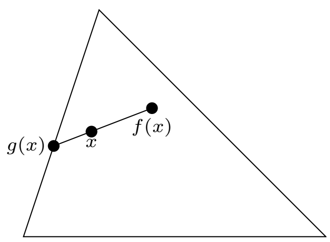
Lemat 3. *Dla trójkąta $\triangle$ o bokach I, J, K nie istnieje takie przekształcenie ciągłe $f : \triangle \to \partial\triangle = I \cup J \cup K$, że $f(I) \subset I$ i $f(J) \subset J$ i $f(K) \subset K$.*

Załóżmy, że $f : \triangle \to \partial\triangle$ jest takim przekształceniem ciągłym, że $f(I) \subset I$ i $f(J) \subset J$ i $f(K) \subset K$. Niech $A = f^{-1}(I)$, $B = f^{-1}(J)$, $C = f^{-1}(K)$. Ponieważ I, J, K są zbiorami domkniętymi, f jest przekształceniem ciągłym, więc zbiory A, B, C są domknięte. Oczywiście $I \subset A$, $J \subset B$, $K \subset C$. Dla każdego $x \in \triangle$,

$f(x) \in \partial\triangle = I \cup J \cup K$, więc $A \cup B \cup C = \triangle$. Jednocześnie $I \cap J \cap K = \emptyset$, więc $A \cap B \cap C = \emptyset$. Sprzeczność z lematem 2.

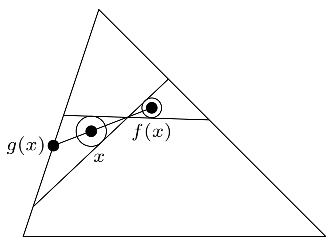
Lemat 4. *Dla trójkąta $\triangle$ o bokach I, J, K nie istnieje takie przekształcenie ciągłe $f : \triangle \to \partial\triangle$, że $f(x) = x$, dla $x \in \partial\triangle$.*

Załóżmy, że $f : \triangle \to \partial\triangle$ jest takim przekształceniem ciągłym, że $f(x) = x$ dla $x \in \partial\triangle$. Wtedy $f(I) \subset I$ i $f(J) \subset J$ i $f(K) \subset K$. Sprzeczność z lematem 3.



Rys. 1

Dowód twierdzenia. Załóżmy, że $f : \triangle \to \triangle$ jest przekształceniem ciągłym i $f(x) \neq x$ dla każdego $x \in \triangle$. Dla każdego $x \in \triangle$ niech $g(x) \in \partial\triangle$ będzie punktem, w którym półprosta wychodząca z punktu $f(x)$ i przechodząca przez punkt x przecina brzeg trójkąta (rys. 1).

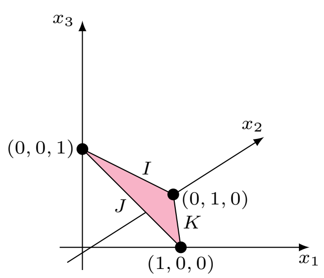


Rys. 2

Półprosta jest określona jednoznacznie, bo $f(x) \neq x$. Tak określone przekształcenie $g : \triangle \to \partial\triangle$ jest ciągłe. Niech $\varepsilon > 0$, określamy otoczenie punktu $g(x)$ na brzegu $\partial\triangle$ o długości ε. Na tym otoczeniu budujemy stożek o wierzchołku na odcinku łączącym punkt x z $f(x)$ (rys. 2). Wybieramy $\eta > 0$ takie, że kula otwarta $B(f(x), \eta)$ zawiera się w stożku. Z ciągłości przekształcenia f istnieje $\delta > 0$ takie, że $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \eta)$ i $B(x, \delta)$ zawiera się w stożku. Wtedy $g(B(x, \delta)) \subset B(g(x), \varepsilon)$. Zatem $g : \triangle \to \partial\triangle$ jest przekształceniem ciągłym takim, że $g(x) = x$ dla $x \in \partial\triangle$. Sprzeczność z lematem 4.

W 1974 roku Mark Yoseloff zauważył, że z twierdzenia Brouwera wynika lemat Spernera (punkt stały przekształcenia f musi należeć do trójkąta sieci, którego wierzchołki są różnych kolorów). Oznacza to, że wszystkie wyżej podane lematy są równoważnikami twierdzenia Brouwera.

Twierdzenie Brouwera można wykazać bezpośrednio z lematu 1.



Rys. 3

Drugi dowód twierdzenia. Niech

$$\triangle = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \ \wedge \ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}, \quad \text{(rys. 3).}$$

Załóżmy, że $f : \triangle \to \triangle$ jest przekształceniem ciągłym takim, że $f(x) \neq x$ dla każdego $x \in \triangle$. Ponieważ dla nieujemnych wartości x_k oraz $f(x_k)$, $\sum_k x_k = 1$ i $\sum_k f(x_k) = 1$, więc z warunku $f(x) \neq x$ wynika, że przynajmniej jedna ze współrzędnych $f(x_k) - x_k$, $k = 1, 2, 3$, punktu $f(x) - x$ musi być ujemna i przynajmniej jedna musi być dodatnia.

Dla każdego $i \geqslant 2$ dzielimy boki trójkąta $\triangle$ na i równych części, a łącząc je liniami równoległymi do boków trójkąta, otrzymujemy sieć i-tego rzędu. Poszczególnym wierzchołkom sieci przypiszemy kolor zielony ($= 1$), czerwony ($= 2$), niebieski ($= 3$) według następującej reguły: kolor wierzchołka u określa najmniejszy indeks k, dla którego k-ta współrzędna punktu $f(u) - u$ jest ujemna.

Oznaczmy boki trójkąta $\triangle$ jak na rysunku 3. Jeśli wierzchołek sieci u leży na boku I, to $u_1 = 0$, więc pierwsza współrzędna punktu $f(u) - u$ nie może być liczbą ujemną, czyli taki punkt u nie otrzyma koloru zielonego (1). Analogicznie wierzchołki sieci z boku J nie otrzymają koloru czerwonego (2), a wierzchołki sieci z boku K nie otrzymają koloru niebieskiego (3). W szczególności wierzchołek $(1, 0, 0)$ otrzyma kolor zielony, wierzchołek $(0, 1, 0)$ kolor czerwony, wierzchołek $(0, 0, 1)$ kolor niebieski. Takie kolorowanie wierzchołków sieci jest zgodne z podanym w lemacie 1. Zatem na podstawie lematu 1 w każdej sieci i-tego rzędu istnieje trójkąt, którego wierzchołki są różnych kolorów: c_i, n_i, z_i. Na podstawie twierdzenia Bolzano–Weierstrassa istnieje podciąg zbieżny $c_{i_j} \to \xi$. Ponieważ średnice trójkątów kolejnych sieci dążą do 0, więc również $n_{i_j} \to \xi$ i $z_{i_j} \to \xi$. Wówczas z ciągłości przekształcenia f, $f(\xi_1) \leqslant \xi_1$, $f(\xi_2) \leqslant \xi_2$ i $f(\xi_3) \leqslant \xi_3$. Oznacza to, że żadna ze współrzędnych punktu $f(\xi) - \xi$ nie jest liczbą dodatnią, a to jest sprzeczne z warunkiem $f(x) \neq x$.

Twierdzenie Brouwera pozostaje prawdziwe w przestrzeniach euklidesowych $\mathbb{R}^n$ (najczęściej jest ono formułowane dla kul):

Niech $B^n \subset \mathbb{R}^n$ będzie domkniętą kulą i $f : B^n \to B^n$ przekształceniem ciągłym. Wtedy istnieje $x \in B^n$ takie, że $f(x) = x$.

Rezultat ten nie przenosi się do przestrzeni o nieskończonym wymiarze. W przestrzeni c_0 ciągów rzeczywistych zbieżnych do zera z normą $\|x = (x_1, x_2, \ldots)\| = \sup_{i \geqslant 1} |x_i|$ dla kuli domkniętej $B = \{x \in c_0 : \|x\| \leqslant 1\}$ i przekształcenia ciągłego $f : B \to B$ danego wzorem $f(x_1, x_2, \ldots) = (1, x_1, x_2, \ldots)$ jedynym punktem stałym jest $(x_1, x_2, \ldots) = (1, 1, \ldots)$, ale $(1, 1, \ldots) \notin c_0$.

Twierdzenie Brouwera rozszerzył (na nieskończenie wymiarowe przestrzenie Banacha) Juliusz Schauder w 1930 roku, ale to całkiem inna historia…