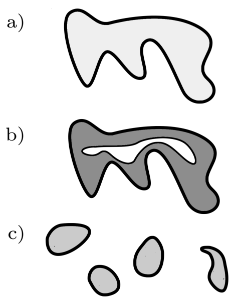
 Co to jest? Co to jest? Co to jest?

Przestrzeń spójna

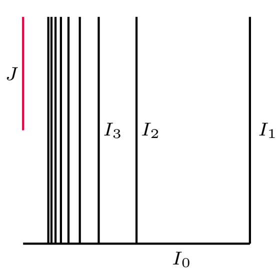


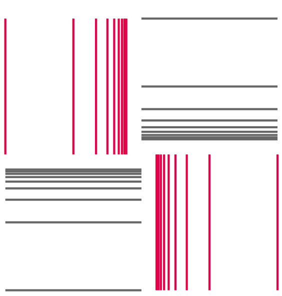
Rysunek c) przedstawia niespójny podzbiór $\mathbb{R}^2$ (z metryką euklidesową).

Przestrzeń metryczna *dyskretna* (opisana na stronie 7), która ma więcej niż jeden punkt, nie jest spójna. Każde dwa rozłączne, niepuste podzbiory są jej rozkładem na kawałki. Można powiedzieć nawet więcej – przestrzeń dyskretna rozpada się na jednopunktowe kawałki – jak szyba samochodu po poważnej kolizji.

Definicja. Przekształcenie $f : (X, \rho) \to (Y, \rho')$ jest **ciągłe**, jeżeli dla każdego ciągu $x_1, x_2, \ldots$ punktów przestrzeni X, zbieżnego w metryce ρ do punktu x_0 ciąg punktów $f(x_1), f(x_2), \ldots$ przestrzeni Y jest zbieżny w metryce ρ' do punktu $f(x_0)$.

Twierdzenie. *Jeżeli $f : (X, \rho) \to (Y, \rho')$ jest przekształceniem ciągłym, zaś (X, ρ) przestrzenią spójną, to obraz $f(X)$ jest przestrzenią spójną w metryce ρ'.* Wnioskiem z tego twierdzenia jest *własność Darboux* funkcji ciągłych opisana na stronie 3.





Pojęcie spójności przestrzeni metrycznej to uściślenie intuicji, że przestrzeń jest „w jednym kawałku”.

Definicja. Przestrzeń metryczna (X, ρ) jest **spójna**, jeżeli nie istnieją niepuste domknięte podzbiory A i B takie, że ich część wspólna jest zbiorem pustym $A \cap B = \emptyset$, zaś ich suma jest całą przestrzenią $A \cup B = X$.

Zbiory A i B to są właśnie te „kawałki”, na które rozpada się przestrzeń X. Zauważmy, że gdy przestrzeń nie jest spójna i jest sumą swoich niepustych, domkniętych i rozłącznych podzbiorów, to każdy z tych podzbiorów jest także otwarty.

Przykład 1. Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ na prostej z metryką $\rho(x, y) = |x - y|$ nie jest spójny, bowiem można go przedstawić w postaci sumy

$$\mathbb{Q} = \{q \in \mathbb{Q} \colon q \leqslant \sqrt{2}\} \cup \{q \in \mathbb{Q} \colon q \geqslant \sqrt{2}\}.$$

Przykład 2. Podobnie zbiór liczb niewymiernych nie jest spójny, bo można go przedstawić na przykład w postaci

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \colon x \leqslant 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \colon x \geqslant 0\}.$$

Bardzo ważne przykłady przestrzeni spójnych dostarcza następujące twierdzenie:

Twierdzenie. *Następujące przestrzenie metryczne z metryką prostej euklidesowej są spójne dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$: odcinek otwarty (a, b), odcinek domknięty $[a, b]$, domknięty jednostronnie $[a, b)$, $(a, b]$, półproste $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$ i cała prosta $\mathbb{R}$. Są to jedyne spójne podzbiory prostej euklidesowej.*

Jak zachowają się przestrzenie spójne, gdy będziemy je przekształcać? Jeżeli przekształcenie może zgniatać, rozciągać, ale nie rozrywać, to z przestrzeni „w jednym kawałku” otrzymamy również przestrzeń w „jednym kawałku”, czyli spójną. Przekształcenia, które nie „rozrywają”, nazywamy **ciągłymi**. „Rozrywanie” to oderwanie punktu granicznego od ciągu punktów do niego zbieżnego. Definicja przekształcenia ciągłego przestrzeni metrycznej znajduje się na marginesie.

Rozważmy teraz odcinek $[0, 1]$ ze zwykłą metryką. Jeżeli na punkty tego odcinka będziemy patrzeć jak na czas, to na przekształcenie odcinka w przestrzeń X możemy patrzeć jak na szlak przebyty w czasie od 0 do 1 w przestrzeni X. Jeżeli X jest przestrzenią metryczną z metryką ρ, a przekształcenie jest ciągłe, to mówimy, że mamy **drogę** w przestrzeni metrycznej (X, ρ). Obraz 0 jest początkiem, a obraz 1 końcem tej drogi. Przestrzenie, w których od jednego do drugiego punktu możemy przejść pewną drogą, są tak ważne, że mają swoją nazwę.

Definicja. Przestrzeń metryczna (X, ρ) nazywa się **łukowo spójna**, jeżeli dla dowolnych punktów $x, y \in X$ istnieje droga o początku w punkcie x i końcu w punkcie y.

Niech (X, ρ) będzie podzbiorem płaszczyzny ze zwykłą metryką euklidesową. Możemy powiedzieć w pewnym uproszczeniu, że podzbiór ten jest łukowo spójny, jeżeli dla każdych dwóch jego punktów można narysować, nie odrywając ołówka od papieru, krzywą łączącą je i zawartą w X.

Obraz drogi jest przestrzenią spójną i nietrudno się domyślić, że prawdziwe jest twierdzenie:

Twierdzenie. *Jeżeli przestrzeń metryczna (X, ρ) jest łukowo spójna, to jest spójna.*

To twierdzenie nietrudno uzasadnić. Jeżeli bowiem $A \cup B = X$ byłoby rozkładem przestrzeni X na dwa „kawałki”, to weźmy punkt $x \in A$ oraz $y \in B$. Wiemy, że istnieje droga o początku w punkcie x i końcu w punkcie y. Ale rozkład X na rozłączne i niepuste domknięte podzbiory A i B dawałby rozkład obrazu drogi od x do y, co jest niemożliwe, bo obraz drogi jest przestrzenią spójną.

Nie każda przestrzeń spójna jest łukowo spójna. Rozważmy przykład podzbioru płaszczyzny, który jest jakby grzebieniem o nieskończenie wielu zębach zbiegających do granicznego zęba. Tego granicznego zęba jednak brakuje – jest tylko jego kawałek (oznaczony na rysunku literą J), nieprzymocowany do grzebienia. Cała przestrzeń jest jednak spójna – ten kawałek nie odpadnie, choć nie ma drogi, która łączy punkt odcinka J z jakimkolwiek punktem grzebienia, który do odcinka J nie należy. To jest jakby spójność „na magnes”. Magnes tworzą zbieżne ciągi, które „przyciągają” swoją granicę.

Jeszcze lepiej zjawisko to ilustruje spójna przestrzeń, przypominająca znak polskiego lotnictwa, powstała z nieskończenie wielu patyczków (patrz obok).

Agnieszka BOJANOWSKA