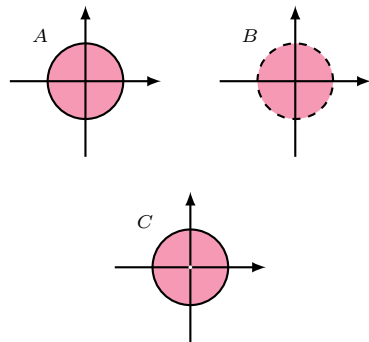


W przestrzeniach metrycznych prawdziwe są różne twierdzenia o ciągach zbieżnych i funkcjach ciągłych. Można je dowodzić tylko raz, zamiast w każdym przypadku osobno. W istocie rzeczy nie zostały one wymyślone, lecz odkryte. Pojawiały się w dowodach różnych twierdzeń, np. o istnieniu rozwiązań równań algebraicznych, funkcyjnych, różniczkowych – i w końcu podano definicję ogólną.

Przestrzeniami metrycznymi są także *butelka Kleina*, *przestrzeń rzutowe*, *przestrzeń Łobaczewskiego* i wiele, wiele innych.

Michał KRYCH

Zbiór domknięty i zbiór otwarty



Przypuśćmy, że (X, ρ) jest *przestrzenią metryczną*, czyli zbiorem X , w którym możemy mierzyć odległość między punktami tego zbioru. W przestrzeni metrycznej możemy zdefiniować pojęcie zbioru otwartego i domkniętego.

Zacznijmy od przykładu podzbiorów płaszczyzny ze zwykłą, szkolną metryką euklidesową. Rozważmy trzy podzbiory: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(0, 0)\}$.

Widzimy, że zbiór A różni się od zbiorów B i C tym, że „nic nie brakuje na brzegu”. Uściślenie „niczego nie brakuje” jest następujące: jeżeli ciąg punktów p_1, p_2, \dots zbioru A jest *zbieżny* do punktu p płaszczyzny, to punkt p również należy do zbioru A . Zbiory B i C nie mają tej własności. W zbiorze C na przykład ciąg punktów $(1, 0), (\frac{1}{2}, 0), \dots, (\frac{1}{n}, 0), \dots$ jest zbieżny do punktu $(0, 0)$, ale ten do zbioru C nie należy. W przypadku zbioru B każdy punkt płaszczyzny należący do okręgu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ jest *granicą* pewnego zbieżnego ciągu punktów zbioru B , ale do zbioru B nie należy. Powiemy, że zbiór A jest domknięty, a zbiory B i C domknięte nie są.

Definicja. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że podzbiór $U \subseteq X$ jest **domknięty** w przestrzeni X , jeżeli dla każdego zbieżnego ciągu punktów zbioru U jego granica także należy do U .

Definicja. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że podzbiór $U \subseteq X$ jest **otwarty** w przestrzeni X , jeżeli zbiór $X \setminus U$ jest domknięty.

W powyższym przykładzie zbiór A jest domknięty, ale nie jest otwarty, zbiór B nie jest domknięty, ale jest otwarty, zaś zbiór C nie jest ani otwarty, ani domknięty na płaszczyźnie euklidesowej.



Rozważmy podzbiór płaszczyzny ze zwykłą metryką euklidesową. Zbiór E jest otwarty (przerywana linia nie należy do tego zbioru) – dla każdego punktu z tego zbioru można dobrać odpowiedni promień tak, żeby kula w tym punkcie w całości była zawarta w zbiorze E . Zbiór D nie jest otwarty (zawiera punkty na brzegu) – kula o środku na brzegu tego zbioru i dodatnim promieniu nie będzie zawarta w tym zbiorze.

Rozważmy przestrzeń Y składającą się z punktów prostej rzeczywistej o współrzędnych $\frac{1}{n}$, dla każdej liczby naturalnej n . Odległość między punktami $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{m}$ to po prostu moduł ich różnicy $|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$. Ta przestrzeń, mimo że odległości między jej punktami są dowolnie małe, także jest dyskretna. Dla dowolnego punktu $\frac{1}{n}$ kula o środku w $\frac{1}{n}$ i promieniu mniejszym od $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ nie zawiera punktów przestrzeni Y , poza środkiem kuli, czyli punktem $\frac{1}{n}$.

Niech $(X, \rho_1), (X, \rho_2)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Metryki ρ_1, ρ_2 nazywa się *równoważnymi*, jeżeli granice dowolnych ciągów są identyczne z użyciem obu tych metryk.

W dowolnej przestrzeni metrycznej (X, ρ) możemy zdefiniować pojęcie kuli o środku w punkcie x i promieniu r – jest to po prostu zbiór punktów przestrzeni X odległych od x o ściśle mniej niż r . Zauważmy, że podzbiór $U \subseteq X$ przestrzeni metrycznej (X, ρ) jest otwarty, jeżeli dla każdego punktu $x \in U$ istnieje takie r , że kula o środku w punkcie x i promieniu r jest zawarta w U .

Rozważmy jeszcze następujące dwa przykłady. Niech X będzie zbiorem punktów płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych. Na zbiorze X rozważmy metrykę euklidesową. Zauważmy, że w tej przestrzeni metrycznej dowolne dwa punkty są odległe co najmniej o 1, a więc ciągi zbieżne to takie, które są stałe od pewnego miejsca. Wynika z tego, że każdy podzbiór tej przestrzeni metrycznej jest domknięty, zatem każdy podzbiór jest też otwarty. Przestrzeń metryczna o tej własności, że każdy jej podzbiór jest domknięty lub równoważnie każdy jest otwarty, nazywa się **dyskretną**. W przestrzeni dyskretnej w szczególności każdy jednopunktowy podzbiór jest otwarty – dla każdego punktu możemy więc znaleźć taką kulę, że nie ma w niej punktów innych niż jej środek. Stąd nazwa tej przestrzeni: możemy żartobliwie powiedzieć, że każdy punkt przestrzeni ma zapewnioną dyskrecję – nie ma dowolnie bliskich sąsiadów.

Na koniec zauważmy, że jeżeli ρ i ρ' są *równoważnymi metrykami* na zbiorze X , to rodziny domkniętych podzbiorów przestrzeni metrycznej (X, ρ) i (X, ρ') są te same. Ta uwaga sugeruje, że pojęcie domkniętości i otwartości zależy od struktury ogólniejszej od metryki – tak jest w istocie, ale to już jest inna opowieść.

Agnieszka BOJANOWSKA