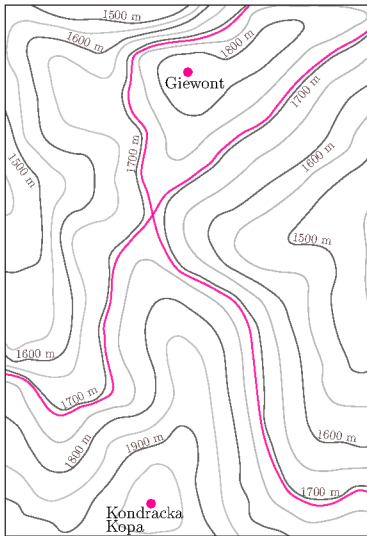


Topologia na Antypodach

Michał MIŚKIEWICZ*

* doktorant, Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet
Warszawski



Typowe (regularne) poziomice zaznaczone są na szaro, a nietypowe (osobliwe) na kolorowo.

Mapa obok przedstawia rejon Giewontu i Kopy Kondrackiej. Typowa poziomicą jest albo pusta (np. nie ma żadnych punktów na wysokości 2500 m), albo składa się z jednej lub więcej składowych, z których każda jest albo zamkniętą pętlą (jak ta wokół Giewontu, 1800 m), albo krzywą o dwóch końcach na brzegu mapy (np. te powyżej dolin Małej Łąki i Kondratowej, 1600 m). Może się jednak zdarzyć, że poziomicą jest *osobliwa* – na wysokości 1894 m mamy izolowany punkt (szczyt Giewontu), a na 1725 m przecięcie w kształcie litery X (Kondracka Przełęcz). Są to jednak pojedyncze przypadki – jak szczyt, przełęcz albo dno kotła – a wszystkie pozostałe poziomice są *regularne*.

W matematyce pojęcie poziomicy pojawia się w podobnym, nieco ogólniejszym kontekście. Poziomicą funkcji f wyznaczoną przez wartość y nazywamy zbiór tych wszystkich argumentów x , dla których $f(x) = y$; zbiór ten oznaczamy przez $f^{-1}(y)$. W poprzednim akapicie rozważaliśmy funkcję f przyporządkowującą punktowi x na mapie jego wysokość, ale to tylko jedna z możliwości. W ogólnym przypadku można wykazać (mówi o tym tzw. twierdzenie Sardy), że prawie każda poziomicą *gładkiej* funkcji f jest regularna, a więc – podobnie jak w przypadku kartograficznym – osobliwe poziomice są zjawiskiem nietypowym.

Nie będziemy tu definiować pojęcia gładkości; obrazowo chodzi o to, że wykres funkcji f jest gładki, w szczególności nie ma uskoków ani kantów.

W ramach dalszego śledzenia poziomicy pokażemy teraz, że na równiku Ziemi można znaleźć dwa punkty antypodyczne leżące na jednej poziomicy. Punkty *antypodyczne* to takie, że tunel wydrążony z jednego z nich na wylot przez środek Ziemi wypada w drugim; z dobrym przybliżeniem tak położone są Quito w Ekwadorze (2850 m n.p.m.) i Pekanbaru w Indonezji (12 m n.p.m.). Jeśli w każdym z tych dwóch miast mamy znajomego, możemy ich poprosić o udanie się w podróż na zachód w tym samym tempie i informowanie na bieżąco o aktualnej wysokości nad poziomem morza. O ile na początku znajomy z Ekwadoru jest ponad 2 km wyżej, to sytuacja będzie się szybko zmieniać, a po pewnym czasie nasi znajomi zamienią się miejscami i różnica w raportowanych wysokościach będzie taka sama, ale na minusie. Niewątpliwie gdzieś po drodze wysokości musiały się wyrównać – w ten sposób znaleźliśmy punkty antypodyczne na jednej poziomicy.

Powyższy przykład jest mało zaskakujący, bo bez niczyjej pomocy z łatwością znajdziemy żadaną parę punktów na pełnym morzu (wysokość 0 m n.p.m.). Przedstawione rozumowanie jest jednak bardziej uniwersalne i działa również dobrze, gdyby zamienić wysokość na jakąś inną funkcję (średnia roczna temperatura, ciśnienie, suma opadów etc.), byle tylko była ciągła, bo musimy wykluczyć skoki. Możemy też pójść krok dalej i chcieć porównać dwa parametry naraz. Pokażemy więc, że na powierzchni Ziemi można znaleźć dwa punkty antypodyczne o równej średniej rocznej temperaturze i ciśnieniu. Wyniknie to z następującego ogólnego twierdzenia.

Twierdzenie 1 (Karol Borsuk, Stanisław Ulam). Niech

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

będzie sferą jednostkową, a $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dowolną funkcją ciągłą. Wówczas istnieje punkt $\mathbf{x} \in S^2$, dla którego $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$.

Aby zastosować powyższe twierdzenie do naszej sytuacji, powierzchnię Ziemi modelujemy za pomocą sfery, a odpowiednią funkcję f definiujemy poprzez przyporządkowanie punktowi \mathbf{x} pary liczb wyrażających średnią roczną temperaturę i ciśnienie w \mathbf{x} . Z twierdzenia otrzymujemy wtedy dwa punkty $\mathbf{x} = (x, y, z)$ i $-\mathbf{x} = (-x, -y, -z)$, w których oba te parametry mają tę samą wartość. Pozostaje zauważyć, że odpowiada to dokładnie parze punktów antypodycznych na powierzchni Ziemi.

Czytelnik łatwo zauważy, że na samym równiku taki punkt mógłby nie istnieć, więc trzeba rozszerzyć obszar poszukiwań.

Przyjmując $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(-\mathbf{x})$, można łatwo wykazać równoważność Twierdzeń 1 i 2.

Dla wygody twierdzenie Borsuka–Ulama pokażemy w następującej wersji:

Twierdzenie 2. Załóżmy, że funkcja ciągła $F: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest nieparzysta, to znaczy spełnia $F(-\mathbf{x}) = -F(\mathbf{x})$ dla każdego $\mathbf{x} \in S^2$. Wówczas $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ dla pewnego $\mathbf{x} \in S^2$ ($\mathbf{0}$ oznacza punkt $(0, 0)$).

Przykładem takiej funkcji jest $G(x, y, z) = (x, y)$, czyli rzut prostopadły na płaszczyznę xy . W tym konkretnym przypadku zauważamy, że równość $G(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ zachodzi dla dokładnie dwóch punktów, które na cieść biegunów Ziemi oznaczmy \mathbf{n}, \mathbf{s} . Inny przykład otrzymamy, jeśli weźmiemy dowolny obrót $r: S^2 \rightarrow S^2$ przekształcający sferę na nią samą i określimy funkcję $G_r(\mathbf{x}) = G(r(\mathbf{x}))$; wówczas miejsca zerowe to $r^{-1}(\mathbf{n}), r^{-1}(\mathbf{s})$. Ale przejdźmy już do ogólnego przypadku.

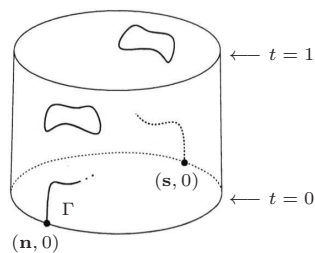
Zarys dowodu Twierdzenia 2. Ograniczymy się do wykazania tezy twierdzenia w przypadku, gdy F jest funkcją nie tylko ciągłą, ale też gładką. Przypuśćmy, że teza nie zachodzi, czyli F nie przyjmuje zera; będziemy dążyć do sprzeczności.

Między F a funkcją G z przykładu wyżej można znaleźć całą rodzinę funkcji

$$(*) \quad H(\mathbf{x}, t) = tF(\mathbf{x}) + (1-t)G(\mathbf{x}) \quad \text{dla } \mathbf{x} \in S^2, t \in [0, 1].$$

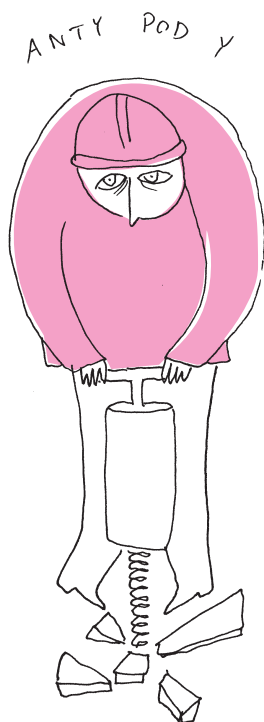
Wstawienie $t = 0$ w powyższym wzorze daje na powrót G , natomiast dla $t = 1$ otrzymujemy F . Rodzinę tę możemy też rozumieć jako jedną gładką funkcję $H: S^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ określoną na (pustym w środku) cylindrze $S^2 \times [0, 1]$, pokrywającą się z G i F odpowiednio na dolnym ($t = 0$) i górnym ($t = 1$) denku.

Założymy dodatkowo, że poziomica $H^{-1}(\mathbf{0})$ jest regularna. Wówczas składa się ona ze skończonego wielu krzywych, zamkniętych lub mających końce na którymś z denek. Skoro F nie przyjmuje zera, to $H^{-1}(\mathbf{0})$ nie może dotykać górnego denka. Wiemy natomiast, że ma dokładnie dwa punkty wspólne z dolnym denkiem ($(\mathbf{n}, 0)$ oraz $(\mathbf{s}, 0)$), gdyż na tym denku H pokrywa się z G . Jak mówi przysłowie, *każdy kij ma dwa końce*, a więc w skład poziomicy $H^{-1}(\mathbf{0})$ może wchodzić jedynie jedna niezamknięta krzywa $\Gamma \subseteq S^2 \times [0, 1]$, o końcach w $(\mathbf{n}, 0)$ i $(\mathbf{s}, 0)$.



Tak może wyglądać poziomica $H^{-1}(\mathbf{0})$. Na potrzeby rysunku denka cylindra są okręgami, a nie sferami.

Przypomnijmy teraz, że funkcje F i G są nieparzyste, a więc zgodnie ze wzorem $(*)$ nieparzysta jest także każda z rodziny funkcji je łączących, to znaczy $H(-\mathbf{x}, t) = -H(\mathbf{x}, t)$ dla dowolnych \mathbf{x}, t . W konsekwencji poziomica $H^{-1}(\mathbf{0})$ ma następującą własność symetrii: jeśli jakiś punkt (\mathbf{x}, t) do niej należy, to punkt $(-\mathbf{x}, t)$ również. Tę samą własność ma więc też krzywa Γ . Opisaną sytuację trudno jest jednak wiernie oddać na rysunku, z bardzo prostego powodu – jest niemożliwa!



Żeby się o tym przekonać, ponownie poprośmy o pomoc naszych sprawdzonych znajomych. Niech obaj podróżują w tym samym tempie wzdłuż krzywej Γ , przy czym jeden niech zacznie z punktu $(\mathbf{n}, 0)$, a drugi z $(\mathbf{s}, 0)$. Ze względu na symetrię Γ w każdym momencie nasi znajomi będą w punktach postaci (\mathbf{x}, t) i $(-\mathbf{x}, t)$, co oznacza, że nie mogą się spotkać. Z drugiej strony, po pewnym czasie każdy z nich dojdzie do przeciwnego końca Γ , więc po drodze gdzieś musieli się minąć. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że funkcja F musi przyjmować zero. \square

Wróćmy na chwilę do przyjętego *ad hoc* założenia o regularności $H^{-1}(\mathbf{0})$ – jest ono spełnione w typowym przypadku, ale nie zawsze. Czytelnik znający twierdzenie Sarda łatwo uzupełni tę lukę, zamieniając w dowodzie funkcję G na G_r i odpowiednio H na H_r zgodnie ze wzorem $(*)$; można bowiem sprawdzić, że dla prawie każdego obrotu r poziomica $H_r^{-1}(\mathbf{0})$ jest regularna, co pozwala przeprowadzić resztę rozumowania bez zmian. Przyjęte na początku założenie o gładkości F też nietrudno wyrugować.

Czytelnik obdarzony Szczególnie Czujnym Okiem może zauważyć, że przedstawione rozumowanie równie dobrze stosuje się do funkcji ciągłych $F: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ z n -wymiarowej sfery w n -wymiarową przestrzeń dla dowolnego $n = 1, 2, 3, \dots$ W szczególności dla $n = 1$ otrzymujemy następujące twierdzenie: dla każdej ciągłej funkcji $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, określonej na okręgu, znajdziemy punkt \mathbf{x} , w którym $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$. Zatoczyliśmy w ten sposób pełne koło i rozwiązaliśmy w inny sposób początkowy problem z punktami antypodycznymi na równiku.