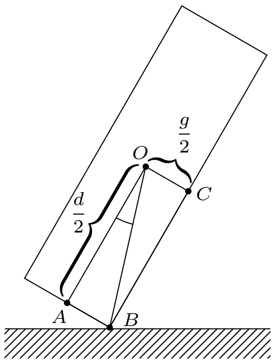


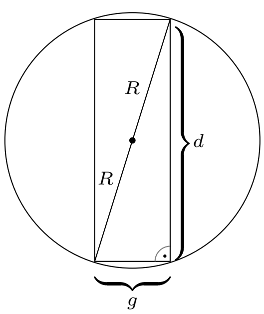
Rys. 2

I triumfalnie oznajmił: grubość monety powinna stanowić 25% długości jej średnicy. Życie jest piękne, a my jesteśmy genialni! Jednak Ludek, który lubił fizykę, nad czymś rozmyślał. Po chwili powiedział, że widzi inne rozwiązanie. Poza przypadkiem, gdy moneta wylądowała od razu na swojej podstawie lub na krawędzi, musiała wylądować koślawie. Miodek chwyta koślawie padającą monetę, która pod wpływem siły ciężkości ostatecznie wyląduje na tej stronie, na której rzut jej środka ciężkości znajdzie się we wnętrzu powłoki wypukłej rzutu tej strony. To zaś zależy od kąta $\sphericalangle AOB$, i tu zrobił rysunek (rys. 2). Warunki zadania będą spełnione, gdy kąt $\sphericalangle AOB$ będzie równy $\frac{1}{3}$ kąta prostego $\sphericalangle AOC$. Przy oznaczeniach z rysunku

$$\frac{\frac{1}{2}g}{\frac{1}{2}d} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{skąd } g = \frac{\sqrt{3}}{3}d \approx 0{,}577 \cdot d.$$

Oznacza to, że grubość monety spełniającej warunki zadania powinna wynosić 57,7% długości jej średnicy. *No to mamy problem*, przyznali chłopcy, ale najważniejsze było dla nich, że na lekcję nie pójdą z niczym.

Gruby po powrocie do domu zaczął szukać czegoś na temat zadania w necie. Znalazł fascynującą historię. Pewnego razu, gdy John von Neumann wraz z uczonymi kolegami wysiadał z taksówki, taksówkarz zadał mu pytanie, które jest treścią naszego zadania. Ku niemałemu zdziwieniu kolegów, po jakichś 15–20 sekundach von Neumann ocenił, że grubość takiej monety powinna stanowić około 35% długości jej średnicy. Jak rozumował von Neumann, możemy się tylko domyślać.



Rys. 3

Federick Mosteller widział to tak (*Fifty challenging problems in probability with solutions*, Dover Publ., N. York, 1965, Problem 38). Na monecie (= walcu) opisana jest sfera o promieniu R (rys. 3). Tę sferę tworzą wszystkie możliwe wektory momentu siły znormalizowane do długości R, zaczepione w środku ciężkości walca. Są to też wszystkie możliwe kierunki rzutu środka ciężkości walca. Aby spełnić warunki zadania, trzecia część powierzchni kuli powinna przypadać na sytuację, gdy rzut środka ciężkości pozwala na lądowanie monety na krawędzi. Ponieważ pole warstwy kulistej jest proporcjonalne do jej grubości ($= 2\pi Rg$), więc nasza moneta powinna mieć grubość równą $\dfrac{1}{3}$ średnicy sfery opisanej na monecie. Zatem

$$g = \frac{1}{3} \cdot 2R, \quad \text{czyli } 2R = 3g.$$

Pozostaje obliczyć grubość takiej monety w stosunku do jej średnicy. Tu wystarczy Pitagoras:

$$g^2 + d^2 = (2R)^2, \quad \text{skąd } g = \frac{1}{2\sqrt{2}}d \approx 0{,}353 \cdot d.$$

Kto ma rację?

Dowody „just-do-it” w zadaniach o przeliczalności

*Robert CRUMPLIN**

*student, Uniwersytet Cambridge

We wrześniu 2018 roku miał miejsce kolejny, trzeci międzynarodowy obóz matematyczny Maths Beyond Limits, odbywający się corocznie w Milówce koło Żywca. W zeszłym roku wzięło w nim udział 60 licealistów z 12 europejskich państw. Rekrutacja uczestników na tegoroczny obóz jest już zakończona, natomiast potencjalni tutorzy wciąż mogą zgłaszać się do prowadzenia zajęć. Szczegóły dotyczące aplikacji oraz obozu dostępne są na stronie `mathsbeyondlimits.eu`

W zeszłym roku (już po raz drugi!) miałem przyjemność pełnić funkcję tutora podczas obozu Maths Beyond Limits. Poprowadziłem dwie serie zajęć, z których jedna dotyczyła teorii mnogości. Starając się dać uczestnikom podstawy arytmetyki zbiorów nieskończonych w zajmujący i bezbolesny, mam nadzieję, sposób, pokazałem ciekawe zadania, wykorzystujące różne metody i pomysły. Jeden z nich jest szczególnie warty uwagi…

Przeliczalnie wiele, czyli tyle, że można je ponumerować liczbami naturalnymi.

Zadając proste pytanie „Czy istnieje zbiór […] spełniający warunki […]?”, można wygenerować wiele zadań. Niektórzy nawet zaznaczą, że *przeliczalnie* wiele. Struktura zbiorów jest na tyle prosta, że jeśli rozwiązanie istnieje (i przypadkiem nie jest równoważne *hipotezie continuum*), prawdopodobnie znajdziemy je, korzystając z podstawowych własności funkcji działających na zbiorach. Dodatkowo, czasem warto przeformułować problem, powiązać go z czymś dobrze znanym, pozwalającym lepiej go zwizualizować (np. myśleć o podzbiorach płaszczyzny zamiast o całej płaszczyźnie). Dobrym planem ataku może być więc nie próba znalezienia abstrakcyjnego dowodu, a konstrukcja przykładu metodą *just-do-it*! Jeżeli zbiór rzeczywiście istnieje, być może nie będzie trudno go znaleźć. Jeżeli zaś pomysły (bądź nerwy) wyczerpią się, można spróbować dowieść jego nieistnienia.

Metodę just-do-it dobrze promuje na swoim blogu Medalista Fieldsa, Tim Gowers, poprzez następujące zadanie:

Czy istnieje gęsty podzbiór płaszczyzny, który nie zawiera trzech współliniowych punktów?

Gęsty podzbiór płaszczyzny to taki, który ma przynajmniej jeden punkt wspólny z dowolnym podzbiorem otwartym płaszczyzny. Np. zbiór wszystkich punktów o współrzędnych niewymiernych $\overline{\mathbb{Q}} \times \overline{\mathbb{Q}}$ jest podzbiorem gęstym płaszczyzny. Jeżeli z tego zbioru wyrzucimy punkt o współrzędnych $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, to zbiór nadal będzie gęsty.

Istnienie takiego zbioru byłoby raczej zaskakujące, mając na uwadze, że zbiory gęste są w pewnym sensie duże (w odniesieniu do zbioru, w którym są gęste), natomiast brak trzech współliniowych punktów sugeruje, że zbiór powinien być mały. Wszelkie wątpliwości znikną jednak, gdy zastosujemy podejście just-do-it. Oczywiście zachęcam Czytelnika do próby samodzielnego rozwiązania przed przejściem do dalszej części tekstu.

Jeżeli A_2 jest gęsty w zbiorze A_1, a A_3 jest gęsty w zbiorze A_2, to z tego wynika, że A_3 jest gęsty w A_1.

Kule otwarte na płaszczyźnie to nic innego niż koła bez brzegu.

Spróbujmy zatem ów zbiór skonstruować. Oznaczmy go przez A. Wiemy, że zbiór punktów o współrzędnych $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ jest gęsty na płaszczyźnie. Zauważmy, że wystarczy pokazać gęstość zbioru A względem zbioru $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Zamiast analizować całą płaszczyznę na raz, rozważmy jej mniejsze kawałki: *kule otwarte* $\{B\big((p,q), \frac{1}{n}\big) \big| (p,q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ o środkach w punktach $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ i promieniach $\frac{1}{n}$. Czyli dla każdego punktu z $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ rozważmy przeliczalnie wiele kul (mogą mieć dowolnie mały promień). Przeformułujmy zadanie następująco: „Dany jest przeliczalny zbiór kul otwartych $D_1, D_2, \ldots$ Czy istnieje zbiór A (podzbiór $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$) taki, że $A \cap D_n$ jest niepusty dla każdego n i żadne trzy punkty z A nie leżą na jednej prostej?”. Zbiór A skonstruujemy indukcyjnie. Niech a_1 będzie dowolnym punktem z D_1, natomiast a_2 dowolnym punktem z D_2. Dalej, wybierzmy $a_3 \in D_3$ takie, że nie leży ono na prostej zawierającej a_1 i a_2. Kuli otwartej nie da się pokryć skończoną liczbą prostych, zatem na pewno istnieje odpowiednie a_3. Tę konstrukcję można kontynuować, co daje finalne rozwiązanie.

Jeszcze uzasadnienie, dlaczego faktycznie zbiór A jest gęstym podzbiorem płaszczyzny: w dowolnym zbiorze otwartym można umieścić któryś ze zbiorów D_i (dowolnie mała kula), a z nim zbiór A ma na pewno co najmniej jeden punkt wspólny.

Okazuje się zatem, że nasza konstrukcja sprowadza się do kilku pomysłów, które można uogólnić do całej klasy zadań tego typu. Po pierwsze, skorzystaliśmy z faktu, że zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ma przeliczalny podzbiór gęsty (jest ośrodkowy). Pozwoliło nam to sprowadzić problem do podobnego, prawie że skończonego i umożliwiło konstrukcję krok po kroku. Jedyne, co pozostało, to zacisnąć zęby i dokończyć rozumowanie.

Podczas moich zajęć wiele zadań można było rozwiązać, korzystając z podobnego rozumowania. Na przykład:

Czy istnieje nieprzeliczalny zbiór parami rozłącznych bałwanków na płaszczyźnie?

Bałwankiem nazywamy tu niezdegenerowaną figurę w kształcie ósemki (np. dwa zewnętrznie styczne okręgi).

Nie można zapomnieć, że funkcje w pewnym sensie są także zbiorami, czyli że o $f : A \to B$ można myśleć jako o podzbiorze $A \times B$. Możemy zatem mieć nadzieję, że pytania o istnienie funkcji o określonych własnościach można rozwiązywać podobnie. Warto przyjrzeć się następującemu zadaniu:

Wykazać, że dla każdej funkcji $g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ istnieje funkcja $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x, \lambda x + \mu) \to g(\lambda, \mu)$ przy $x \to \infty$. W przypadku problemów, wystarczy przypomnieć sobie przytoczone rozumowanie i… Just do it!

Tłumaczyli *Anna ŁEŃ* (MISMaP UW) oraz *Paweł PIWEK* (Uniwersytet Cambridge)

Rozwiązanie zadania F 978.
Podczas dokładnego ważenia należy uwzględnić siły wyporu powietrza. Równowaga mas na szalkach wagi oznacza równowagę ciężarów z uwzględnieniem sił wyporu powietrza:

$$g\left(M - \rho_P \frac{M}{\rho_H}\right) = g\left(m_M - \rho_P \frac{m_M}{\rho_M}\right),$$

gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie. Otrzymujemy stąd:

$$M = \frac{m_M\left(1 - \frac{\rho_P}{\rho_M}\right)}{1 - \frac{\rho_P}{\rho_H}} \approx$$

$$\approx m_M + m_M \rho_P \left(\frac{1}{\rho_H} - \frac{1}{\rho_M}\right).$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $M \approx 30{,}027$ g.