# mała delta

## Nieskończoność: 3. Jak policzyć nieskończone?

Kontynuując naszą przygodę z nieskończonością, spróbujmy wypracować podstawowe narzędzia do jej badania. Przyda nam się w tym celu pewna analogia pomiędzy zbiorami nieskończonymi a tymi skończonymi. Wyobraźmy sobie dwa skończone zbiory osób. Powiedzmy, że elementami pierwszego z nich są: Aldona, Balbina, Cezaria oraz Delfina, a elementami drugiego: Abelard, Baldwin, Cyryl oraz Dezyderiusz. Od razu zauważamy, że te zbiory mają tyle samo elementów. Jak dojść do tego wniosku? Można policzyć elementy w każdym ze zbiorów i w obu przypadkach wyjdzie cztery. A co by było, gdybyśmy nie umieli liczyć do czterech? Czy jest inna metoda pozwalająca na stwierdzenie, że te zbiory mają tyle samo elementów?

Owszem, jest taka metoda – wystarczy ustawić elementy pierwszego zbioru w pary z elementami drugiego zbioru. Na przykład, Aldonę z Abelardem, Balbinę z Baldwinem, Cezarię z Cyrylem i Delfinę z Dezyderiuszem. Skoro udało się takie ustawienie w pary znaleźć, to znaczy, że te dwa zbiory mają taką samą liczbę elementów. I ta metoda ma przewagę nad metodą polegającą na liczeniu elementów obu zbiorów, bowiem możemy ją zastosować także do zbiorów nieskończonych. Chociaż nie jesteśmy w stanie policzyć do nieskończoności, nic nie stoi na przeszkodzie, żeby próbować ustawiać elementy nieskończonych zbiorów w pary. Dlatego matematycy dokładnie tak definiują pojęcie równoliczności zbiorów. Zbiory $A$ i $B$ są równoliczne (co oznaczane jest jako $|A| = |B|$), jeśli elementy zbioru $A$ można ustawić w pary ze wszystkimi elementami zbioru $B$, tak że każdy z elementów jest w dokładnie jednej parze.

Łatwo można zauważyć, że dokładnie to robiliśmy w pierwszym odcinku rozważań o nieskończoności. Nieskończenie wiele jednoosobowych pokoi hotelu (zwanego hotelem Hilberta), ponumerowanych liczbami naturalnymi (poczynając od zera), ustawialiśmy tam w pary z elementami zbioru gości. W pierwszym przypadku zastanawialiśmy się nad zakwaterowaniem nowego gościa (nazwijmy go gościem $-1$) w sytuacji, gdy wszystkie pokoje, których jest nieskończenie wiele, są zajęte. Nazwijmy gościa, który jest w pokoju numer $n$, gościem $n$. Okazało się, że nowego gościa możemy dokwaterować mimo zajętości wszystkich pokoi, przesuwając każdego z dotychczasowych gości do pokoju o numerze o jeden większym. Wtedy pokój zerowy będzie pusty i możemy tam zakwaterować gościa $-1$. Rzeczywiście przyporządkowaliśmy w pary elementy zbioru gości $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{-1\} \cup \mathbb{N}$ z elementami zbioru pokoi $\{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$, przyporządkowując gościowi $n$ pokój o numerze $n + 1$. Inaczej mówiąc, dowiedliśmy, że zbiory $\{-1\} \cup \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N}$ są równoliczne, co zapisujemy $|\mathbb{N} \cup \{-1\}| = |\mathbb{N}|$.

W drugim przypadku kwaterowaliśmy dwa nieskończone zbiory gości: kobiet i mężczyzn do pustego hotelu Hilberta. Doszliśmy do wniosku, że jest to możliwe, jeśli będziemy kwaterować ich na zmianę. Nazwijmy kolejne kobiety kolejnymi liczbami naturalnymi $\{0, 1, 2, \ldots\}$, zaś kolejnych mężczyzn liczbami całkowitymi ujemnymi $\{-1, -2, -3, \ldots\}$. Kwaterując kobiety i mężczyzn na przemian, umieścimy kobiety w pokojach o numerach parzystych, a mężczyzn w pokojach o numerach nieparzystych. Precyzyjnie mówiąc, kobietę $n$ kwaterujemy w pokoju numer $2n$, zaś mężczyznę $n$ (tym razem jest to liczba ujemna) w pokoju $-2n - 1$. Inaczej mówiąc, ustawiliśmy gości, którzy

zostali nazwani liczbami całkowitymi $\{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{-1, -2, -3, \ldots\} = \mathbb{Z}$, w pary z pokojami, których numery to liczby naturalne $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. A zatem dowiedliśmy, że $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, zbiory liczb naturalnych i całkowitych są równoliczne. Może być to sprzeczne z intuicją podpowiadającą, że na każdą niezerową liczbę naturalną przypadają aż dwie liczby całkowite. Niemniej jednak w hotelu Hilberta mieszczą się naraz całe dwie grupy gości, z których każda mogłaby sama zapełnić cały hotel Hilberta.

Na koniec pierwszego odcinka zadaliśmy pytanie, co by się stało, gdyby do pustego hotelu Hilberta przyjechało nieskończenie wiele autokarów, a w każdym nieskończenie wielu gości. Czy wtedy także będziemy ich w stanie wszystkich zakwaterować? Przyjrzyjmy się temu problemowi bliżej. Tym razem nazwijmy gości parami liczb naturalnych $(n, m)$. Pierwsza liczba niech określa numer autokaru, którym gość przyjechał, a druga jego numer siedzenia w autokarze. Wszystkich gości możemy przedstawić więc w następującej nieskończonej tabelce, gdzie kolejne rzędy odpowiadają kolejnym autokarom gości.

$$\begin{array}{cccc}
(0,0) & (0,1) & (0,2) & \ldots \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & \ldots \\
(2,0) & (2,1) & (2,2) & \ldots \\
 & \ldots & &
\end{array}$$

Wszystkich tych gości możemy zakwaterować! Wystarczy, że stworzymy ich listę, przechodząc tę tabelkę kolejnymi skosami idącymi z góry po prawej w dół po lewej. Na pierwszym takim skosie mamy gościa $(0, 0)$, na drugim gości $(0, 1)$ i $(1, 0)$. Na trzecim $(0, 2), (1, 1), (2, 0)$ itd. Gości kwaterujemy w pokojach w tej właśnie kolejności, czyli do pokoju 0 – gościa $(0, 0)$, do pokoju 1 – gościa $(0, 1)$, do pokoju 2 – gościa $(1, 0)$ itd. Widzimy, że każdy gość znajdzie się w jakimś pokoju. Przy odrobinie wysiłku można nawet zauważyć, że gość $(n, m)$ znajdzie się w pokoju $\frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n$. A zatem umiemy ustawić wszystkich gości, czyli umiemy przyporządkować w pary gości oznaczonych parami liczb naturalnych z pokojami ponumerowanymi liczbami naturalnymi. Inaczej mówiąc, dowiedliśmy, że zbiór wszystkich par liczb naturalnych i zbiór liczb naturalnych są równoliczne.

Co zatem można powiedzieć o zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, czyli liczb, które dają się zapisać w postaci $p/q$, gdzie $q \neq 0$ oraz $p$ i $q$ są liczbami całkowitymi? Czy wszystkie elementy tego zbioru można zakwaterować w hotelu Hilberta? Okazuje się, że tak! Dla uproszczenia zajmijmy się najpierw liczbami wymiernymi nieujemnymi. Okazuje się, że zakwaterowanie ich nie różni się specjalnie od poprzedniego rozważanego przypadku – możemy bowiem ustawić wszystkie takie liczby w analogicznej jak poprzednio tabelce, z tym że trzeba wykreślić powtórzenia liczb (np. $1/2 = 2/4$).

$$\begin{array}{ccccc}
0/1 & \cancel{0/2} & \cancel{0/3} & \cancel{0/4} & \ldots \\
1/1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & \ldots \\
2/1 & \cancel{2/2} & 2/3 & \cancel{2/4} & \ldots \\
3/1 & 3/2 & \cancel{3/3} & 3/4 & \ldots \\
 & \ldots & & &
\end{array}$$

Następnie możemy postępować podobnie jak poprzednio – kwaterować liczby kolejno z kolejnych skosów. Zatem zbiór liczb wymiernych nieujemnych jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. Łatwo jednak zauważyć, że cały zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ też ma tę własność – wystarczy kwaterować liczby wymierne nieujemne i ujemne na zmianę. To oznacza, choć znów może się to wydać nieintuicyjne, że $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

Dowiedliśmy zatem, niekiedy wbrew intuicji, że zbiory liczb naturalnych, całkowitych i wymiernych są parami równoliczne. Nasuwa się więc następujące pytanie: czy może w takim razie każde dwa nieskończone zbiory są równoliczne? Próbą odpowiedzi na to pytanie zajmiemy się w następnym odcinku.

*Michał KORCH*