Dwa dowody jednego twierdzenia

Przypomnijmy: zbiory A i B są równoliczne, gdy istnieje funkcja różnowartościowa z A na B (lub – równoważnie – z B na A).

Twierdzenie. *Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych $\mathbb{N}$.*

Dowód przekątniowy

Gwoli jednoznaczności przyjmijmy, że każdą niezerową liczbę z przedziału $[0,1]$ reprezentujemy przez jej rozwinięcie dziesiętne, w którym jest nieskończenie wiele cyfr niezerowych (a więc, na przykład, $1/4$ jest reprezentowana przez 0,24(9), a nie 0,25). Wówczas każda liczba rzeczywista z przedziału $[0,1]$ ma dokładnie jedną reprezentację dziesiętną. Niech $f : \mathbb{N} \to [0,1]$ będzie dowolną funkcją z $\mathbb{N}$ w przedział domknięty $[0,1]$, czyli ciągiem o wyrazach rzeczywistych należących do tego przedziału, i niech $f(k) = 0, a_{k1}a_{k2}a_{k3}\ldots$, gdzie a_{km} oznacza m-tą cyfrę po przecinku liczby $f(k)$. Niech dalej

$$b_k = 4, \text{ gdy } a_{kk} \neq 4 \quad \text{oraz} \quad b_k = 5, \text{ gdy } a_{kk} = 4.$$

Wówczas liczba $b = 0, b_1b_2b_3\ldots$ należy do przedziału $[0,1]$ i nie jest wyrazem ciągu f. Rzeczywiście: $b \neq f(1)$, bo $b_1 \neq a_{11}$, podobnie $b \neq f(2)$, bo $b_2 \neq a_{22}$ i tak dalej. Ogólniej, dla każdej liczby naturalnej k, $b_k \neq a_{kk}$, co oznacza, że $b \neq f(k)$.

Wobec dowolności wyboru funkcji f możemy stwierdzić, że nie istnieje funkcja z $\mathbb{N}$ w $[0,1]$, której zbiór wartości wyczerpywałby przedział $[0,1]$; tym bardziej nie istnieje funkcja z $\mathbb{N}$ na całe $\mathbb{R}$. $\square$

Dowód analityczny

Jak poprzednio, niech $f : \mathbb{N} \to [0,1]$ będzie dowolną funkcją z $\mathbb{N}$ w przedział domknięty $[0,1]$, czyli ciągiem o wyrazach rzeczywistych należących do tego przedziału.

Niech $f(k) = c_k$ dla $k \in \mathbb{N}$. Podzielmy przedział $[0,1]$ na trzy domknięte podprzedziały o długości $1/3$ każdy i niech $[a_0, b_0]$ będzie takim z nich, do którego nie należy c_0. Tak więc $[a_0, b_0] \subset [0,1]$, $b_0 - a_0 = \frac{1}{3}$ oraz $c_0 \notin [a_0, b_0]$. Załóżmy, że dla $k \in \mathbb{N}$ zdefiniowaliśmy już przedział $[a_k, b_k]$ tak, że $[a_k, b_k] \subset [0,1]$, $b_k - a_k = \frac{1}{3^{k+1}}$ oraz $c_k \notin [a_k, b_k]$. Wówczas dzielimy przedział $[a_k, b_k]$ na trzy domknięte podprzedziały równej długości i definiujemy $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ jako ten podprzedział, do którego nie należy c_{k+1}. Mamy wtedy:

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k], \quad b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{3^{k+2}}$$
$$\text{oraz } c_{k+1} \notin [a_{k+1}, b_{k+1}].$$

W ten sposób na mocy indukcji otrzymujemy taki ciąg przedziałów $[a_n, b_n]$, że dla każdej liczby naturalnej n

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset [0,1], \quad b_n - a_n = \frac{1}{3^{n+1}}$$
$$\text{oraz } c_n \notin [a_n, b_n].$$

Ciąg (a_n) jest niemalejący i ograniczony z góry przez 1, ciąg (b_n) jest nierosnący i ograniczony z dołu przez 0, zatem oba te ciągi są zbieżne i mają wspólną granicę, gdyż ciąg $(b_n - a_n)$ dąży do 0; nazwijmy ją c. Ponadto dla każdej liczby naturalnej n, $c \in [a_n, b_n]$, podczas gdy $c_n \notin [a_n, b_n]$. Wniosek: $c \neq c_n$ dla każdego n.

Tak więc nie istnieje funkcja z $\mathbb{N}$ w $[0,1]$, której zbiór wartości wyczerpywałby przedział $[0,1]$; tym bardziej nie istnieje funkcja z $\mathbb{N}$ na całe $\mathbb{R}$.

Wiktor BARTOL

Rozwiązanie zadania M 1527. Aby *udowodnić równoważność*, wykażemy osobno dwie implikacje.

Ponumerujmy osoby obecne na przyjęciu liczbami od 1 do n oraz oznaczmy liczbę wszystkich powitań przez $M = n(n-1)/2$. Niech κ_m będzie permutacją zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, która liczbie i przyporządkowuje numer osoby, mającej na głowie kapelusz i-tej osoby po m-tym powitaniu. Mamy więc $\kappa_0 = \mathrm{id}$ oraz $\kappa_\ell = (i\ j)\kappa_{\ell-1}$, gdzie $(i\ j)$ jest transpozycją, a i, j to numery osób uczestniczących w ℓ-tym powitaniu.

Wobec tego κ_M jest iloczynem M transpozycji (wszystkich możliwych par elementów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$). Z drugiej strony, w myśl warunków zadania, $\kappa_M = \mathrm{id}$. Ponieważ identyczność jest permutacją parzystą, więc wynika z tego, że $2 \mid M$, skąd uzyskujemy $4 \mid n(n-1)$. To oznacza, że jeżeli opisana sytuacja jest możliwa, to n daje resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 4.

Aby uzasadnić, że dla każdego n dającego resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 4 istnieje kolejność powitań prowadząca do opisanej w treści zadania sytuacji, przeprowadzimy *dowód indukcyjny*.

Jeżeli $n = 4$, to bezpośrednio sprawdzamy, że

$$(2\ 3)(1\ 4)(2\ 4)(1\ 3)(3\ 4)(1\ 2) = \mathrm{id},$$

więc wystarczy, że najpierw przywitają się osoby 1 i 2, potem 3 i 4 itd.

Przypuśćmy, że dla pewnego $n = 4k$ mamy odpowiednią kolejność powitań, czyli odpowiedni iloczyn transpozycji. Aby uzyskać odpowiednią kolejność dla $n + 1 = 4k + 1$, dokonajmy następujących zmian w tym iloczynie:

$$(i\ i+1) \mapsto (n+1\ i)(i\ i+1)(n+1\ i+1)$$

dla $i = 1, 3, 5, \ldots, n-1$. W ten sposób uzupełniliśmy iloczyn o n transpozycji (odpowiadających powitaniom z „nową” osobą numer $n+1$) i łatwo sprawdzić, że warunki zadania dla nowej kolejności są spełnione.

Z kolei aby uzyskać odpowiednią kolejność dla $n + 4 = 4(k+1)$ osób, dokonujemy podobnych zmian:

$$(i\ i+1) \mapsto (n+4\ i)(n+3\ i)(n+2\ i)(n+1\ i)(i\ i+1)(n+1\ i+1)$$
$$(n+2\ i+1)(n+3\ i+3)(n+4\ i+4)$$

dla $i = 1, 3, 5, \ldots, n-1$ oraz dołączamy (w dowolnym miejscu) zestaw sześciu kolejno po sobie następujących powitań czterech nowych osób:

$$(n+2\ n+3)(n+1\ n+4)(n+2\ n+4)(n+1\ n+3)$$
$$(n+3\ n+4)(n+1\ n+2).$$

W ten sposób rozszerzyliśmy kolejność powitań w taki sposób, że znów po nastąpieniu wszystkich każdy ma znów swój kapelusz przy $4(k+1)$ osobach. To kończy dowód indukcyjny. $\square$