

Diagramy Venna

W tym artykule zajmiemy się nieco dokładniej diagramami Venna, opisanymi w znakomitym artykule [2]. Najpierw powiemy, co to jest niezależna rodzina zbiorów. Przypuśćmy, że mamy daną rodzinę $\{A_1, \dots, A_n\}$ podzbiorów pewnego ustalonego zbioru S . Od tej pory wszystkie rozpatrywane zbiory będą podziorami tego zbioru S (będziemy go nazywać przestrzenią S). Niech A' oznacza dopełnienie zbioru A do przestrzeni S , tzn. $A' = S \setminus A$. Oznaczmy następnie $A_i^1 = A_i$ oraz $A_i^0 = A_i'$ dla $i = 1, \dots, n$. Każdy zbiór postaci $A_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap A_n^{\alpha_n}$, gdzie $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{0, 1\}$, nazywamy **składową** rodziny $\{A_1, \dots, A_n\}$. Oczywiście każda n -elementowa rodzina zbiorów ma 2^n składowych. Składowymi rodziny zbiorów $\{A, B, C\}$ będą zbiory:

$$\begin{aligned} A^0 \cap B^0 \cap C^0 &= A' \cap B' \cap C', \\ A^1 \cap B^0 \cap C^0 &= A \cap B' \cap C', \\ A^0 \cap B^1 \cap C^0 &= A' \cap B \cap C', \\ A^1 \cap B^1 \cap C^0 &= A \cap B \cap C', \\ A^0 \cap B^0 \cap C^1 &= A' \cap B' \cap C, \\ A^1 \cap B^0 \cap C^1 &= A \cap B' \cap C, \\ A^0 \cap B^1 \cap C^1 &= A' \cap B \cap C, \\ A^1 \cap B^1 \cap C^1 &= A \cap B \cap C. \end{aligned}$$

Gdy wszystkie składowe rodziny $\{A_1, \dots, A_n\}$ są różne i niepuste, rodzinę nazwiemy **niezależną**.

A oto przykład rodziny niezależnej $\{A, B, C\}$ podzbiorów przestrzeni $S = \{0, 1, \dots, 7\}$:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 5, 6\}, C = \{3, 4, 6, 7\}.$$

Rodziny niezależne są wykorzystywane w dowodach tożsamości z rachunku zbiorów. Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Niech $W_1(A, B, C)$ i $W_2(A, B, C)$ będą wyrażeniami rachunku zbiorów (tzn. występują w nich tylko zbiory A, B i C oraz symbole działań na zbiorach: \cup, \cap, \setminus). Jeśli dla pewnej niezależnej rodziny $\{P, Q, R\}$ podzbiorów pewnej przestrzeni S zachodzi równość $W_1(P, Q, R) = W_2(P, Q, R)$, to ta równość zachodzi także dla dowolnych zbiorów A, B i C .

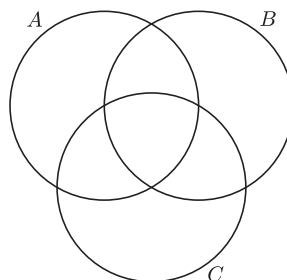
Twierdzenia tego nie będziemy dowodzić, popatrzymy natomiast na przykład jego zastosowania. Udowodnimy równość $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. Dla naszej rodziny niezależnej mamy:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ (A \cup B) \setminus C &= \{1, 2, 5\}, \\ A \setminus C &= \{1, 2\}, \\ B \setminus C &= \{2, 5\}, \\ (A \setminus C) \cup (B \setminus C) &= \{1, 2, 5\}. \end{aligned}$$

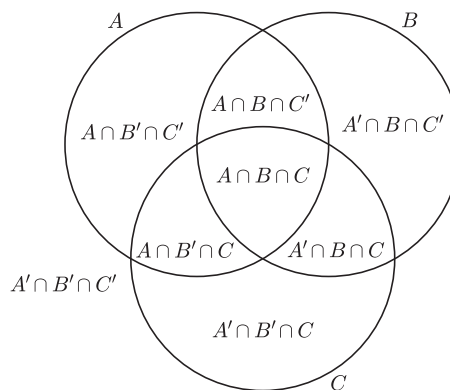
Okazało się, że dla tej rodziny niezależnej zachodzi dowiedziona równość. Zatem ta równość jest prawdziwa dla dowolnych zbiorów A, B i C . Podobne twierdzenie jest prawdziwe dla wyrażen zawierających więcej zbiorów. Dowód znajduje się np. w książce [1].

Wojciech GUZICKI*

Dowody takie jak powyższy szczególnie łatwo przeprowadzić na rysunku. Rysujemy niezależną rodzinę podzbiorów pewnej przestrzeni S i zaznaczamy na tym rysunku zbiory występujące po obu stronach równości. Jeśli oba zaznaczone zbiory są identyczne, to równość zachodzi dla dowolnych zbiorów. Niezależną rodzinę zbiorów $\{A, B, C\}$ najprościej narysować w następujący sposób.



Taki rysunek nazywamy diagramem Venna. Każdy z n zbiorów naszej rodziny niezależnej $\{A_1, \dots, A_n\}$ jest narysowany w postaci pewnego podzbioru płaszczyzny (w naszym przypadku są to trzy koła), przy czym rozważana przestrzeń (u nas płaszczyzna) jest podzielona krzywymi ograniczającymi zbiory A_1, \dots, A_n na 2^n (u nas $2^3 = 8$) części. Każda z tych części odpowiada jednej składowej (zakładamy, że części te są spójne, czyli w jednym kawałku). A oto te składowe:



W dalszym ciągu ustalimy jednolity sposób numerowania składowych. Numerem składowej

$$A_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap A_n^{\alpha_n}$$

jest liczba, której kolejnymi cyframi w zapisie w systemie dwójkowym są: $\alpha_n, \dots, \alpha_1$. Na przykład, jeśli naszą rodziną niezależną jest $\{A, B, C\}$ (tzn. $A_1 = A, A_2 = B$ oraz $A_3 = C$), to składowa

$$A' \cap B \cap C = A_1^0 \cap A_2^1 \cap A_3^1$$

ma numer 6, gdyż liczba 6 ma zapis dwójkowy 110. Podobnie składowa

$$A \cap B \cap C' = A_1^1 \cap A_2^1 \cap A_3^0$$

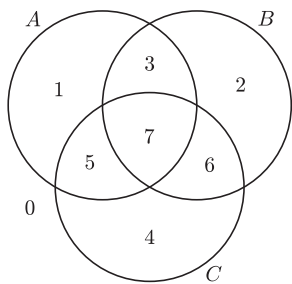
ma numer 3, gdyż liczba 3 ma zapis dwójkowy 011. W przypadku, gdy rodzina niezależna składa się z czterech zbiorów $\{A, B, C, D\}$, to składowa

$$A' \cap B \cap C' \cap D = A_1^0 \cap A_2^1 \cap A_3^0 \cap A_4^1$$

ma numer 10, gdyż liczba 10 ma zapis dwójkowy 1010.

* Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego

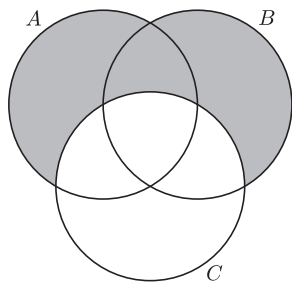
A oto nasz diagram Venna dla trzech zbiorów A , B i C ze składowymi ponumerowanymi w ten sposób:



Czytelnik zechce sam sprawdzić, że zbiory po obu stronach równości

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

wyglądają w następujący sposób.



Z powyższych rozważań widać, że umiejętność rysowania niezależnych rodzin zbiorów (czyli diagramów Venna) może się przydać w praktyce do dowodzenia równości w rachunku zbiorów. We wspomnianym artykule została pokazana jedna metoda rysowania diagramów Venna. Jednak diagramy dla dużych liczb n były bardzo skomplikowane i mało czytelne. Powstaje naturalne pytanie, czy można narysować diagram Venna, w którym wszystkie zbiory mają stosunkowo prostą postać. Diagram Venna dla trzech zbiorów można było narysować za pomocą trzech okręgów. A czy można tak narysować cztery okręgi, by tworzyły diagram Venna dla czterech zbiorów?

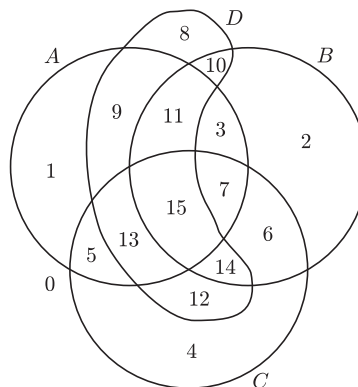
Okazuje się, że jest to niemożliwe. Mianowicie za pomocą trzech okręgów można podzielić płaszczyznę na co najwyżej 8 części. Cztery okręgi przecinają każdy z dotychczasowych okręgów w co najwyżej dwóch punktach; te punkty dzielą go zatem na co najwyżej dwóch łuków. Każdy łuk dzieli jeden obszar na dwie części. Zatem cztery okręgi dzielą płaszczyznę na co najwyżej $8 + 6 = 14$ części. Nie otrzymamy zatem diagramu Venna, gdyż taki diagram dla czterech zbiorów ma mieć 16 składowych. Rozumując w podobny sposób, można pokazać, że jeśli a_n oznacza maksymalną liczbę części, na jakie n okręgów może podzielić płaszczyznę, to ciąg (a_n) spełnia następujące równania rekurencyjne:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 2n.$$

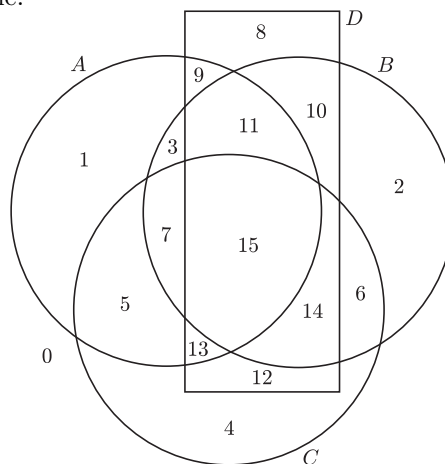
Nietrudno teraz dowieść przez indukcję, że $a_n = n^2 - n + 2$; dla $n = 4$ otrzymamy $a_4 = 14$. Zatem żadna konfiguracja czterech okręgów na płaszczyźnie nie tworzy diagramu Venna. Oczywiście, czwarty zbiór możemy dorysować do trzech okręgów inaczej.

2

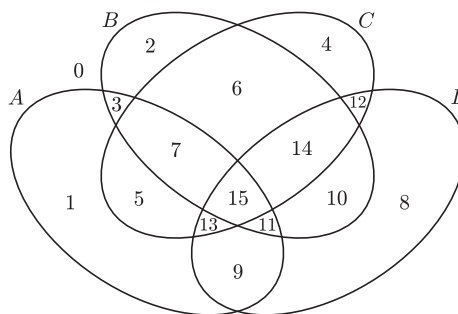
Na następnym rysunku mamy przykład takich czterech zbiorów.



Składowe na tym diagramie Venna zostały ponumerowane zgodnie z przyjętą wyżej zasadą. Powstaje oczywiście pytanie, czy można dorysować czwarty zbiór tak, by był on zbiorem wypukłym. Gdy byłem jeszcze studentem, wydawało mi się to oczywiście niemożliwe; zresztą tak uważało wielu moich kolegów. Następujący rysunek, który mimo wszystko kiedyś udało mi się narysować, wprawił mnie w zrozumiiałe zdumienie.



Inny diagram Venna otrzymamy, rysując cztery elipsy.



Jeszcze inny, składający się z czterech prostokątów, można łatwo narysować samemu. Prostokąty te mają wierzchołki w punktach o następujących współrzędnych:

$$A : (0, 6), (6, 0), (10, 4), (4, 10),$$

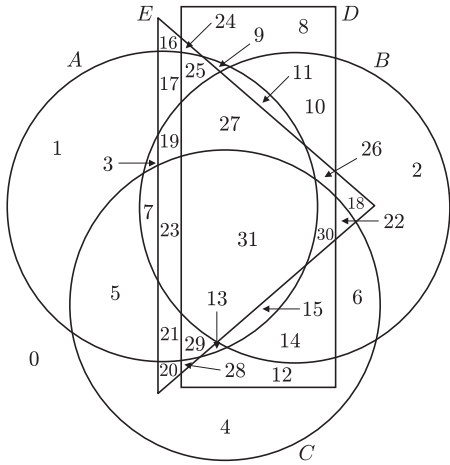
$$B : (14, 6), (10, 10), (4, 4), (8, 0),$$

$$C : (6, 10), (4, 8), (8, 4), (10, 6),$$

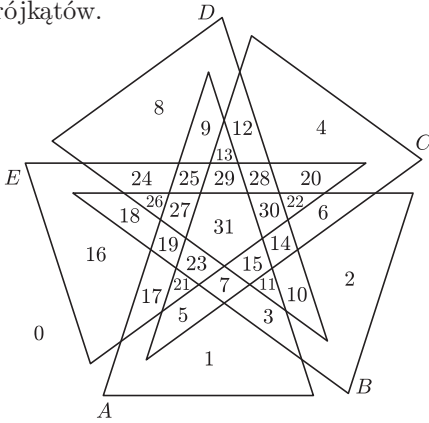
$$D : (8, 10), (4, 6), (6, 4), (10, 8).$$

Gdy udało się narysować diagram Venna, w którym wszystkie cztery zbiory były wypukłe, należało

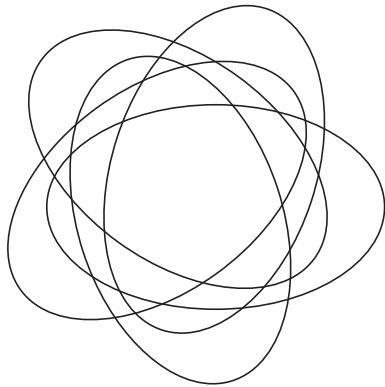
spróbować zrobić to samo dla pięciu zbiorów. Do trzech kół i prostokąta udało mi się dorysować jeszcze trójkąt.



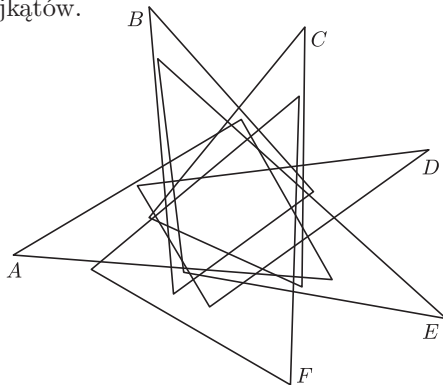
Można również narysować diagram Venna składający się z pięciu trójkątów.



Szczególnie ładny jest utworzony na podobnej zasadzie diagram Venna złożony z pięciu elips.



Można także narysować diagram Venna składający się z sześciu trójkątów.



Wierzchołki tych trójkątów mają następujące współrzędne:

- A : (221, 73), (0, 90), (158, 184),
- B : (111, 63), (94, 262), (208, 134),
- C : (200, 68), (94, 116), (202, 248),
- D : (136, 54), (86, 138), (288, 163),
- E : (300, 46), (118, 78), (100, 226),
- F : (192, 0), (54, 80), (198, 200).

Okazuje się jednak, że nie można narysować diagramu Venna złożonego z więcej niż sześciu trójkątów. Aby tego dowiedzieć, pokażemy najpierw, że jeśli t_n jest największą liczbą obszarów, na jakie n trójkątów może podzielić płaszczyznę, to ciąg (t_n) spełnia następujące równania rekurencyjne: $t_1 = 2$, $t_{n+1} = t_n + 6n$. Jeden trójkąt oczywiście dzieli płaszczyznę na dwa obszary. Przypuśćmy teraz, że mamy już n trójkątów na płaszczyźnie. Następny trójkąt przecina każdy z tych n trójkątów w co najwyżej 6 punktach. Te punkty przecięcia dzielą obwód tego ostatniego trójkąta na co najwyżej $6n$ części; każda z tych części dzieli jeden obszar na dwie części. Zatem maksymalna liczba części, na jakie możemy podzielić płaszczyznę za pomocą $n + 1$ trójkątów, wynosi co najwyżej $t_n + 6n$ (pozostawimy jako ćwiczenie przekonanie się, że można tak umieścić n trójkątów na płaszczyźnie, by każde dwa przecinały się w dokładnie 6 punktach; taka konfiguracja da właśnie t_n części). Teraz można łatwo udowodnić przez indukcję, że $t_n = 3n^2 - 3n + 2$. Można również łatwo udowodnić, że jeśli $n \geq 8$, to $3n^2 - 3n + 2 < 2^n$. To pokazuje, że jeśli $n \geq 8$, to żadna konfiguracja n trójkątów na płaszczyźnie nie tworzy diagramu Venna. Jeśli zaś $n = 7$, to $3n^2 - 3n + 2 = 3 \cdot 49 - 21 + 2 = 128 = 2^7$. Zatem można tak umieścić 7 trójkątów na płaszczyźnie, by podzieliły one płaszczyznę na 2^7 obszarów. Jednak taka konfiguracja nie będzie diagramem Venna. Mianowicie każde dwa trójkąty muszą przecinać się w sześciu punktach, a więc wierzchołki każdego trójkąta leżą na zewnątrz każdego innego. Stąd wynika, że w każdym trójkącie trzy obszary wewnętrzne, na których brzegu leżą wierzchołki, zawarte są tylko w tym jednym trójkącie, a więc stanowią części tej samej składowej. A to znaczy, że ta konfiguracja nie jest diagramem Venna.

Widzimy więc, że istnieje diagram Venna złożony z sześciu trójkątów i nie istnieją diagramy Venna złożone z n trójkątów dla $n \geq 7$. A jak jest z czworokątami wypukłymi? Albo z pięciokątami wypukłymi? A czy dla każdego n istnieje diagram Venna złożony z wielokątów wypukłych? Odpowiedzi na niektóre tak postawione pytania są znane. Myślę jednak, że warto pokusić się o to, by na podobne pytania odpowiedzieć samemu. Obszerny przegląd wiadomości na temat diagramów Venna można znaleźć w [3]; tam też są odnośniki do wielu innych interesujących źródeł.

Bibliografia

- [1] W. Guzicki, P. Zakrzewski, *Wstęp do matematyki. Wprowadzenie do teorii mnogości*. PWN Warszawa, 2005.
- [2] J. Tyszkiewicz, *Pizza Venna*, Delta 3(358), 2004, str. 10–11.
- [3] <http://www.combinatorics.org/Surveys/ds5/VennEJC.html>