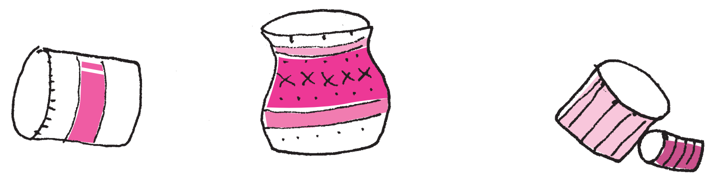
Własność odbicia laplasjanu. Niech D będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$, symetrycznym względem prostej $y = 0$ i niech $D^+ = \{(x, y)\colon y > 0\}$. Załóżmy, że funkcja G klasy C^2 jest określona na D^+ i spełnia $\Delta G = \lambda G$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz dla każdego punktu $(x_0, 0) \in D$ mamy $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} G(x, y) = 0$. Wtedy funkcja $\hat{G}(x, y) = \operatorname{sgn}(y)G(x, |y|)$, określona na całym D, jest klasy C^2 oraz spełnia $\Delta\hat{G} = \lambda\hat{G}$.

że funkcja H określona kawałkami na trójkątach ABC oraz ABC', spełnia warunek $\Delta H = \lambda H$ na całym tym obszarze.

W ten sam sposób, wyróżniając w W_1 inne czworokąty, wnioskujemy, że funkcja H jest dobrze określona na wszystkich krawędziach trójkątów, a także że spełnia równanie $\Delta H = \lambda H$ na całym Ω_2. Dociekliwy Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić nietrudnym rachunkiem, że dla funkcji H jest również spełniony warunek brzegowy Dirichleta na Ω_2. Dowód, że H nie jest tożsamościowo równa 0, pominiemy, gdyż jest on dość techniczny.

Pracowicie wykazaliśmy, że jeżeli λ należy do $\Lambda(\Omega_1)$, to należy również do $\Lambda(\Omega_2)$, czyli $\Lambda(\Omega_1) \subset \Lambda(\Omega_2)$. Analogicznie uzasadniamy $\Lambda(\Omega_2) \subset \Lambda(\Omega_1)$, a zatem $\Lambda(\Omega_1) = \Lambda(\Omega_2)$. Rozpatrywane wielokąty mają więc takie samo widmo drgań; nie są jednak izometryczne. Daje to negatywną odpowiedź na tytułowe pytanie. Ciekawe, co sądzą na ten temat perkusiści. . . ?



Co ma wspólnego cykl $(6, 5, 4)$ z językiem polskim?

Każdej liczbie rzeczywistej możemy przypisać nieskończony ciąg cyfr jej rozwinięcia dziesiętnego. Jak wiadomo, jeżeli ciąg od pewnego miejsca się *zapętla*, to mamy do czynienia z liczbą wymierną. Inaczej rzecz ujmując, liczby wymierne mają *okresowe* rozwinięcie dziesiętne. Przyjmujemy tutaj, że tzw. rozwinięcie skończone jest rozwinięciem okresowym – od pewnego miejsca na każdej pozycji występuje wyłącznie cyfra 0.

My będziemy rozważać ciągi liczbowe. Możemy przyjąć jakąś konkretną metodę produkcji kolejnych wyrazów ciągu, na przykład

$$c_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}c_n, & \text{gdy } c_n \text{ jest parzysta,} \\ 3c_n + 1, & \text{gdy } c_n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Jednak stwierdzenie, czy dla dowolnej początkowej liczby c_0 ten ciąg **zawsze** się zapętli, jest nie lada wyzwaniem. Tego dotyczy *problem Collatza* – ale to nie on jest bohaterem tego tekstu.

Wspomniany raport HAKMEM można znaleźć na stronie `dspace.mit.edu/handle/1721.1/6086`

W 1972 roku zespół z Artificial Intelligence Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, opracował raport HAKMEM – złożony z prawie dwustu algorytmicznych ciekawostek (miszmasz algebry, kombinatoryki, teorii liczb, teorii grup. . .). Pozycja 134. wspomnianego raportu także dotyczy ciągów liczbowych i ich zapętlania. Przyjmijmy następującą zasadę:

każdy element ciągu (oprócz pierwszego) określa, ile liter jest potrzebnych do zapisania słownie (w języku angielskim) poprzedniego elementu ciągu.

Zacznijmy na przykład od liczby 14. Słowo *fourteen* ma osiem liter, więc drugi element ciągu to 8. Słowo *eight* ma pięć liter, kolejny element ciągu to 5. Słowo *five* ma cztery litery – podobnie jak *four*. Zatem

$$14\,(\textit{fourteen}) \to 8\,(\textit{eight}) \to 5\,(\textit{five}) \to 4\,(\textit{four}) \to 4\,(\textit{four}) \to \ldots$$

i tym sposobem otrzymujemy ciąg $(14, 8, 5, 4, 4, \ldots)$. Co ciekawe, niezależnie od tego, od jakiej liczby zaczniemy, dany ciąg zawsze (i szybko) zapętli się na liczbie 4.

Czy już się domyślasz, Czytelniku, jak brzmi odpowiedź na tytułowe pytanie?

*Bartłomiej PAWLIK**

* Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska