Ziemiolubne liczby i ulotne reszty

*Mariusz SKAŁBA**

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Człowiek twardo stąpa po ziemi, a z nim pojęcia, które stworzył. Na przykład liczby są tylko tym, do czego człowiekowi służą: porządkowe, kardynalne i inne. W skończonych zastosowaniach są to liczby naturalne $1, 2, 3, \ldots$ i ich uogólnienia: liczby całkowite, wymierne, rzeczywiste i zespolone. Słowo *skończone* w poprzednim zdaniu odnosi się wyłącznie do opisywanego atrybutu *liczonego* obiektu: a to jego rangi, a to mocy, a to fizycznych rozmiarów. W matematyce teoretycznej liczb praktycznie zawsze potrzebujemy nieskończenie wiele!

Wróćmy zatem na ubitą przez tysiąclecia glebę teorii liczb. Jak udowodnić najprościej, że równanie

$$x^2 - 20xy + y^2 = 100000000003$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych x, y? Można na przykład zauważyć, że odpowiednia kongruencja mod 4 nie ma rozwiązań. Wynika to stąd, że kwadrat liczby całkowitej zawsze przystaje do 0 lub 1 modulo 4, a zatem lewa jej strona przystaje do $0, 1, 2$ modulo 4, a prawa do 3.

Nie zawsze jest tak łatwo i o tym właśnie jest ten artykuł. Rozważmy mianowicie równanie

$$x^4 - 2y^4 = 7z^2 \tag{1}$$

i zapytajmy o jego rozwiązania w liczbach całkowitych nieujemnych x, y, z. Jeśli x, y, z jest takim rozwiązaniem oraz $x = 0$, to $-2y^4 = 7z^2$, a więc również $y = z = 0$. Załóżmy teraz nie wprost, że istnieje rozwiązanie, w którym $x > 0$, i rozważajmy dalej jedno z rozwiązań, w których x przyjmuje wartość dodatnią najmniejszą z możliwych. Udowodnimy przede wszystkim, że wówczas

$$(x, y) = (x, z) = (y, z) = 1. \tag{2}$$

((a, b) oznacza największy wspólny dzielnik liczb całkowitych a, b.) Niech $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, \ldots\}$ oznacza dalej zbiór wszystkich liczb pierwszych. Załóżmy, że istnieje takie $q \in \mathbb{P}$, że $x = qx_1$, $y = qy_1$ dla pewnych $x_1, y_1 \in \mathbb{N}_0$, przy czym $x_1 > 0$. Po podstawieniu tych wartości do równania (1) otrzymujemy

$$q^4(x_1^4 - 2y_1^4) = 7z^2$$

i stąd dostajemy, że $z = q^2 z_1$, gdzie $z_1 \in \mathbb{N}_0$ (również dla $q = 7$). Liczby x_1, y_1, z_1 spełniają zatem równanie (1), przy czym $0 < x_1 = x/q < x$, sprzeczność z wyborem x. Udowodniliśmy więc, że $(x, y) = 1$. Analogicznie wykazujemy, że $(x, z) = (y, z) = 1$. Z (1) i (2) wynika, że wszystkie liczby x, y, z są nieparzyste. Rzeczywiście, gdyby x była parzysta, to z (1) wynika, że również z byłaby parzysta, skąd $(x, z) \geqslant 2$, sprzeczność z (2). Podobnie z jest nieparzysta. Gdyby y była parzysta to mielibyśmy kongruencję

$$x^4 \equiv 7z^2 \pmod{8},$$

ale to nie jest możliwe, gdyż kwadrat liczby nieparzystej przystaje do 1 mod 8:

$$(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1 = 8m + 1, \quad \text{gdzie } m \in \mathbb{N}_0.$$

Zatem y jest również nieparzysta. Wykażemy teraz, że

$$z \equiv \pm 1 \pmod{8}. \tag{3}$$

Jeśli $z = 1$, to (3) oczywiście zachodzi. Gdy $z > 1$, rozpatrujemy dowolny dzielnik pierwszy p liczby z. Mamy $p \neq 2$ oraz z równania (1) wynika kongruencja

$$x^4 - 2y^4 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ponieważ $z \equiv 0 \pmod{p}$, więc $y \not\equiv 0 \pmod{p}$ na mocy (2). Niech t będzie takie, że $yt \equiv 1 \pmod{p}$. Wówczas

$$(xt)^4 \equiv 2(yt)^4 \equiv 2 \pmod{p},$$

czyli kongruencja $r^2 \equiv 2 \pmod{p}$ ma rozwiązanie, np. $r = (xt)^2$. Teraz trzeba przywołać słynne twierdzenie z teorii reszt kwadratowych. Jako pierwszy udowodnił je Gauss:

Jeśli $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$, to kongruencja $r^2 \equiv 2 \pmod{p}$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

Rozwiązanie zadania F 1002.
Gdyby do Ziemi nie docierał strumień energii ze Słońca, to temperatura jej powierzchni miałaby wartość, przy której strumień energii dopływającej z wnętrza Ziemi byłby równy strumieniowi energii wypromieniowanej.
Wartość strumienia ciepła dostarczanego w procesie przewodnictwa cieplnego wynosi

$$q_p = \lambda \frac{dT}{dx},$$

gdzie x oznacza głębokość. Strumień energii wypromieniowanej z powierzchni:

$$q_w = \sigma T^4.$$

Drugie równanie opisuje promieniowanie ciała doskonale czarnego i w przypadku powierzchni ciał „rzeczywistych” jego prawą stronę należy pomnożyć przez zdolność emisyjną powierzchni α. Dla powierzchni Ziemi α jest bliskie 1, a dla materiałów tworzących skały powierzchniowe mieści się w granicach $1 > \alpha > 0{,}2$.
Przyjmijmy $\alpha = 1$ oraz $dT/dx = 30$ K/km. Równość obu strumieni energii prowadzi do oszacowania:

$$T = \left(\frac{q_p}{\sigma}\right)^{1/4} \approx 32 \text{ K}.$$

Uwzględnienie zdolności emisyjnej powierzchni wprowadziłoby dodatkowy czynnik równy co najwyżej $5^{1/4} \approx 1{,}5$, a więc prowadzi do co najwyżej $T \approx 48$ K.

Dominującym źródłem energii we wnętrzu Ziemi są najprawdopodobniej rozpady jąder ^{232}Th o czasie połowicznego rozpadu $\tau \approx 14 \cdot 10^9$ lat, ^{238}U, $\tau \approx 4{,}47 \cdot 10^9$ lat oraz ^{40}K, $\tau \approx 1{,}25 \cdot 10^9$ lat.

Podsumujmy: liczba z jest iloczynem swoich czynników pierwszych p, a zatem (3) zachodzi. Skoro $z = 8k \pm 1$, więc $z^2 = 16(4k^2 \pm k) + 1$, czyli $z^2 \equiv 1 \pmod{16}$. Z podobnych powodów $x^4 \equiv 1 \equiv y^4 \pmod{16}$. Zatem lewa L i prawa P strona równania (1) spełniają następujące kongruencje:

$$L \equiv 1 - 2 \cdot 1 \equiv 15 \pmod{16}, \quad P \equiv 7 \cdot 1 \equiv 7 \pmod{16},$$

co daje upragnioną sprzeczność.

Jedynym rozwiązaniem równania (1) w liczbach całkowitych jest więc trójka $x = y = z = 0$. W finale dowodu rozstrzygającą rolę odegrały rozważania modulo 16. Nie jest jednak prawdą, że kongruencja

$$x^4 - 2y^4 \equiv 7z^2 \pmod{16}$$

nie ma rozwiązań w liczbach nieparzystych. Wystarczy wziąć $x = 1$, $y = 1$, $z = 3$.

Nie jest to przypadek. W pozostałej części artykułu pokażemy, że dla każdej liczby $m > 1$ istnieją liczby całkowite x, z spełniające kongruencję

$$x^4 - 2 \equiv 7z^2 \pmod{m}. \tag{4}$$

Oznacza to, że strategia dowodu, że równanie (1) nie ma całkowitych rozwiązań poza $x = y = z = 0$, polegająca na szukaniu liczby m, dla której kongruencja

$$x^4 - 2y^4 \equiv 7z^2 \pmod{m}$$

nie ma rozwiązań x, y, z spełniających $(x, y, z, m) = 1$, nie może się powieść.

Z twierdzenia chińskiego o resztach wynika, że można się ograniczyć do przypadku, gdy $m = p^k$, gdzie $p \in \mathbb{P}$. Najpierw rozpatrzmy przypadek $p = 2$ i połóżmy $x = 1$. Wykażemy, że dla każdego $k \geqslant 1$ istnieje z_k spełniające kongruencję

$$7z_k^2 + 1 \equiv 0 \pmod{2^k}. \tag{5}$$

Dla $k \leqslant 3$ bierzemy $z_k = 1$. Załóżmy teraz, że dla pewnego $k \geqslant 3$ istnieją takie z_k, t_k, że $7z_k^2 + 1 = t_k \cdot 2^k$. Wykażemy, że istnieją takie z_{k+1}, t_{k+1}, że $7z_{k+1}^2 + 1 = t_{k+1} \cdot 2^{k+1}$. Niech $z_{k+1} = z_k + u_k 2^{k-1}$, gdzie u_k dobierzemy za chwilę. Modulo 2^{k+1} mamy

$$\begin{aligned} 7z_{k+1}^2 + 1 &= 7(z_k + u_k 2^{k-1})^2 + 1 \equiv \\ &\equiv 7z_k^2 + 1 + u_k \cdot 7z_k 2^k = 2^k(t_k + u_k \cdot 7z_k). \end{aligned}$$

Liczbę u_k dobieramy tak, aby prawa strona powyższego wzoru była podzielna przez 2^{k+1}:

$$u_k = \begin{cases} 0 \text{ gdy } t_k \equiv 0 \pmod{2}, \\ 1 \text{ gdy } t_k \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

To działa, gdyż $7z_k$ jest nieparzyste.

Zajmiemy się teraz kongruencją (4) dla $m = p^k$, gdzie $p \in \mathbb{P} \setminus \{2, 7\}$. Dla $x = 0, 1, 2$ otrzymujemy odpowiednio kongruencje

$$7z^2 \equiv -2 \pmod{p^k}, \quad 7z^2 \equiv -1 \pmod{p^k}, \quad 7z^2 \equiv 14 \pmod{p^k}.$$

Niech t spełnia warunek $7t \equiv 1 \pmod{p^k}$. Powyższe kongruencje są równoważne następującym:

$$z^2 \equiv -2t \pmod{p^k}, \quad z^2 \equiv -t \pmod{p^k}, \quad z^2 \equiv 2 \pmod{p^k}. \tag{6}$$

Ponieważ zredukowana grupa reszt modulo p^k jest cykliczna oraz

$$(-2t)(-t) \cdot 2 = (2t)^2,$$

więc przynajmniej jedna z kongruencji (6) ma rozwiązanie z (jedna lub wszystkie). W istocie chodzi tu o to, że iloczyn niereszt kwadratowych jest resztą kwadratową itd. Czytelnikowi pozostawiamy przypadek $m = 7^k$.

Podobną własność jak równanie (1) mają równania

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0 \quad \text{[E. Selmer, 1951]},$$
$$x^4 - 17y^4 = 2z^2 \quad \text{[H. Reichardt, 1942]}.$$

Były to w zasadzie pierwsze przykłady nietrywialnych równań diofantycznych, które nie spełniają *zasady lokalno-globalnej*, czyli nie mają nietrywialnych rozwiązań wymiernych, mimo że odpowiednie kongruencje mod m mają nietrywialne rozwiązania dla każdej liczby $m > 1$. Nie ma takich równań

Rozwiązanie zadania F 1001. Temperatura powierzchni planety ustala się, gdy wartość strumienia energii docierającej do jej powierzchni równa się wartości energii wypromieniowanej. Ilość energii docierającej do Ziemi od Słońca w jednostce czasu to:

$$q_{\mathrm{S}} = \pi(1 - A_{\mathrm{Z}})R^2 S,$$

gdzie R oznacza promień Ziemi. Przyjmując, że Ziemia promieniuje jak ciało doskonale czarne o temperaturze T_{Z}, jej powierzchnia wypromieniowuje w jednostce czasu energię równą:

$$q_{\mathrm{w}} = 4\pi R^2 \sigma T_{\mathrm{Z}}^4.$$

Równość obu strumieni prowadzi do wniosku, że:

$$T_{\mathrm{Z}} = \left(\frac{(1 - A_{\mathrm{Z}})S}{4\sigma}\right)^{1/4} \approx 254 \text{ K}.$$

Dla Marsa, poza inną wartością albedo, należy uwzględnić większą odległość od Słońca:

$$T_{\mathrm{M}} = \left(\frac{(1 - A_{\mathrm{M}})Sa_z^2}{4\sigma a_{\mathrm{M}}^2}\right)^{1/4} \approx 208 \text{ K}.$$

Mierzone średnie temperatury powierzchni wynoszą odpowiednio $T_{\mathrm{Z}} = 288$ K i $T_{\mathrm{M}} = 210$ K. Duża różnica obliczonej i mierzonej temperatury dla Ziemi jest wynikiem istnienia atmosfery (ciśnienie „atmosferyczne” na Marsie wynosi 0,006 atm) i związanego z nią efektu cieplarnianego.

stopnia $\leqslant 2$ dowolnej liczby zmiennych, gdyż zachodzi następujące słynne twierdzenie Hassego–Minkowskiego:

Niech $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ będzie formą kwadratową nieokreśloną o współczynnikach całkowitych. Jeśli dla każdego $m > 1$ kongruencja $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{m}$ ma rozwiązanie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniające $(x_1, x_2, \ldots, x_n, m) = 1$, to istnieją $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$, że $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ oraz $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

Nierozwiązalność kongruencji $F \equiv 0 \pmod{m}$ dla liczby m odpowiednio dobranej do badanego równania diofantycznego $F = 0$ jest ewidentną przeszkodą dla jego rozwiązalności w liczbach całkowitych. Przykłady takie, jak Selmera, Reichardta, równanie (1) i wiele, wiele innych dotykają trudnej rzeczywistości: czasem przeszkody na drodze do rozwiązalności są bardziej subtelne i głębiej ukryte. I tak np. równania reprodukowane w tym tekście dają nietrywialne elementy grupy Szafarewicza–Tate'a odpowiednich krzywych eliptycznych. Kryje się za tym wszystkim matematyka nowoczesna i abstrakcyjna, ale jednocześnie bardzo, bardzo konkretna – nasz przykład równania (1) ilustruje oczywiście tylko ten drugi aspekt. Ma to być jednak wystarczającą zachętą dla Czytelnika Zainteresowanego teorią liczb, aby pogłębić swoje studia tego fascynującego działu matematyki :)

Zadania

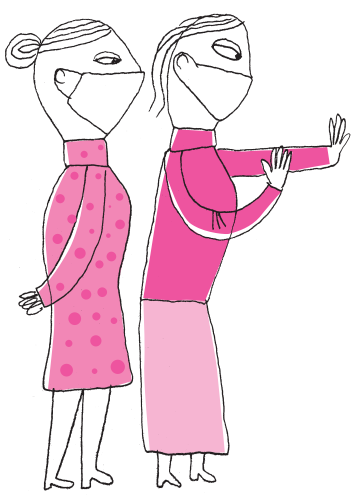
Przygotował Łukasz RAJKOWSKI

M 1639. Znajdź wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ nierówność
$$f(x+y) + y \leqslant f(f(f(x))).$$
Rozwiązanie na str. 17

M 1640. Wśród dowolnych trzech uczestników pewnego kółka matematycznego można wskazać dwóch, którzy wzajemnie się lubią, a wśród dowolnych czterech uczestników są dwaj tacy, którzy się wzajemnie nie lubią. Zakładając, że każdych dwóch uczestników darzy się wzajemną sympatią lub antypatią, znajdź największą możliwą liczbę uczestników kółka.
Rozwiązanie na str. 12

M 1641. Udowodnij, że liczba składająca się w zapisie dziesiętnym z 2^n jedynek ma co najmniej n różnych dzielników pierwszych.
Rozwiązanie na str. 18

Przygotował Andrzej MAJHOFER



F 1001. Oszacuj temperatury powierzchni Ziemi i Marsa, jakie ustaliłyby się, gdyby jedynym źródłem energii było promieniowanie słoneczne. Uwzględnij odbicie części promieniowania od powierzchni planety. Dla Ziemi uśredniony względem czasu ułamek odbijanej energii słonecznej (albedo) wynosi $A_\mathrm{Z} = 0{,}306$, dla Marsa $A_\mathrm{M} = 0{,}25$. Strumień energii słonecznej docierającej do Ziemi (stała słoneczna) $S \approx 1{,}36\ \mathrm{kW/m^2}$, stała Stefana–Boltzmanna $\sigma \approx 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$. Duża półoś orbity Marsa $a_\mathrm{M} \approx 1{,}55$ au (au $\approx 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m oznacza tzw. jednostkę astronomiczną równą dużej półosi orbity Ziemi a_Z).
Rozwiązanie na str. 7

F 1002. Temperatura skał tworzących płaszcz Ziemi rośnie wraz z głębokością. Szybkość obserwowanej zmiany zależy od miejsca na powierzchni Ziemi. Ocenia się, że z dala od granic płyt tektonicznych wynosi od 25 K/km do 30 K/km. Oszacuj, jaka byłaby średnia temperatura powierzchni Ziemi, gdyby nie ogrzewało jej Słońce. Dla skał przyjmij średni współczynnik przewodnictwa cieplnego $\lambda \approx 2\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$. Stała Stefana–Boltzmanna $\sigma \approx 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$.
Rozwiązanie na str. 6