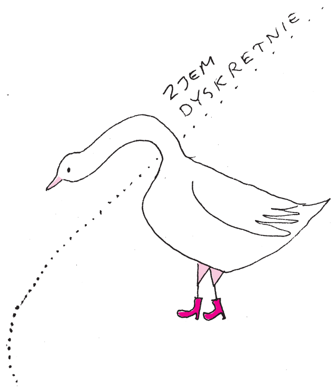
Dyskretny Darboux

Michał KIEZA



Każda funkcja ciągła określona na zbiorze liczb rzeczywistych ma własność Darboux, tzn. jeśli dla pewnych x i y mamy $f(x) = a$ i $f(y) = b$, to w przedziale (x, y) są przyjmowane wszystkie wartości między a i b. Jest to bardzo skuteczne narzędzie do rozwiązywania wielu zadań z analizy matematycznej. Okazuje się, że podobny motyw możemy zaobserwować także w zadaniach dotyczących liczb całkowitych. Rozważmy bowiem taką funkcję $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, że $|f(x+1) - f(x)| \leqslant 1$ dla każdego $x \in \mathbb{Z}$. Ma ona własność analogiczną do wcześniej opisanej własności Darboux, tzn. jeśli dla pewnych x i y mamy $f(x) = a$ i $f(y) = b$, to na zbiorze $\{x+1, x+2, \ldots, y-1\}$ są przyjmowane wszystkie całkowite wartości między a i b. Spróbujmy zobaczyć na przykładach, jak potężna może być powyższa obserwacja.

Zadanie 1. *Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Każdy element zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 6n\}$ pomalowano na biało albo na czarno, przy czym dokładnie $4n$ elementów jest białych. Wykazać, że w tym zbiorze istnieje $3n$ kolejnych liczb całkowitych, wśród których dokładnie $2n$ liczb jest białych.*

Rozwiązanie. Niech $f(k)$ dla $1 \leqslant k \leqslant 3n+1$ będzie liczbą elementów zbioru $\{k, k+1, \ldots, k+3n-1\}$ pomalowanych na biało. Zauważmy, że $f(1) + f(3n+1)$ jest liczbą elementów zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 6n\}$ pomalowanych na biało, czyli $f(1) + f(3n+1) = 4n$. Jeśli $f(1) = 2n$, to teza zadania zachodzi. W przeciwnym razie $f(1) < 2n$ albo $f(1) > 2n$. Przyjmijmy bez straty ogólności, że spełniony jest pierwszy przypadek (drugi jest analogiczny). Wtedy $f(3n+1) > 2n$. Jest jasne, że $|f(k+1) - f(k)| \leqslant 1$, zatem istnieje taka liczba $1 < k < 3n+1$, dla której mamy $f(k) = 2n$, co jest równoważne z tezą zadania.

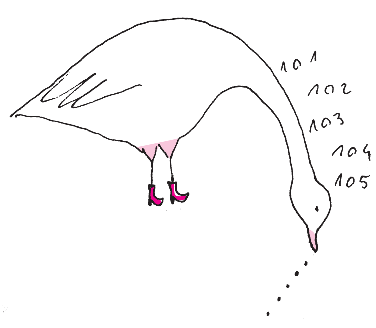
Zadanie 2. *Udowodnić, że istnieje* 2020 *kolejnych dodatnich liczb całkowitych, wśród których jest dokładnie* 13 *liczb pierwszych.*

Rozwiązanie. Niech $f(k)$ dla $k \geqslant 1$ będzie liczbą liczb pierwszych w zbiorze $\{k, k+1, \ldots, k+2019\}$. Wśród pierwszych 2020 liczb całkowitych dodatnich jest więcej niż 13 liczb pierwszych, zatem $f(1) > 13$. Zauważmy także, że wśród liczb $2021! + 2, 2021! + 3, \ldots, 2021! + 2021$ występują same liczby złożone, zatem $f(2021! + 2) = 0$. Oczywiście mamy $|f(k+1) - f(k)| \leqslant 1$, skąd wniosek, że istnieje taka liczba $1 < k < 2021! + 2$, dla której mamy $f(k) = 13$. To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 3. *Nauczyciel napisał na tablicy trójmian kwadratowy $x^2 + 3x + 15$. Następnie wszyscy uczniowie w klasie podchodzili kolejno do tablicy; każdy z nich zmniejszał albo zwiększał o jeden współczynnik przy x albo wyraz wolny trójmianu. Na koniec okazało się, że na tablicy widnieje trójmian $x^2 + 13x + 5$. Udowodnić, że w pewnym momencie na tablicy był napisany trójmian o pierwiastkach całkowitych.*

Rozwiązanie. Niech $f(k)$ będzie wartością danego trójmianu w punkcie $x = -1$ po zmianie współczynników przez k-tego ucznia i niech $f(0)$ będzie wartością w -1 trójmianu napisanego przez nauczyciela. Zauważmy, że $f(0) = 12$, a $f(n) = -7$ (gdzie n to numer ostatniego ucznia). Ponadto zachodzi nierówność $|f(k+1) - f(k)| \leqslant 1$. Rzeczywiście – jest to jasne, gdy zmieniamy wyraz wolny, zaś zmieniając o ± 1 wartość współczynnika przy x, dodajemy lub odejmujemy 1 do wartości wielomianu w -1. W takim razie istnieje takie $1 \leqslant k < n$, że $f(k) = 0$. Zatem w pewnym momencie na tablicy był napisany trójmian $x^2 + ax + b$, którego jednym z pierwiastków było -1; ze wzorów Viète'a wnosimy, że drugim jego pierwiastkiem była liczba całkowita b.

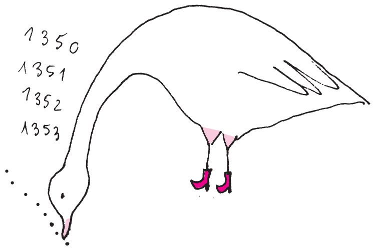
Metoda rozwiązania kolejnego zadania będzie nieznacznie różniła się od poprzednich, gdyż tym razem nasza funkcja będzie skakała o 2, ale tylko po liczbach parzystych.



Zadanie 4. *Dany jest wielokąt wypukły o parzystej liczbie boków. Każdy bok wielokąta ma długość* 2 *lub* 3*, przy czym liczba boków każdej z tych długości jest parzysta. Dowieść, że istnieją dwa wierzchołki wielokąta, które dzielą jego obwód na dwie części jednakowej długości.*

Rozwiązanie. Niech liczba boków wielokąta będzie równa $2n$, a jego wierzchołkami będą kolejno $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n}$. Dla $i = 1, 2, \ldots, 2n$ niech

$$f(i) = A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + A_{i+2}A_{i+3} + \ldots + A_{i+n-1}A_{i+n} - \\ - A_{i+n}A_{i+n+1} - A_{i+n+1}A_{i+n+2} - A_{i+n+2}A_{i+n+3} - \ldots - A_{i+2n-1}A_i,$$



gdzie $A_{k+2n} = A_k$ dla $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$. Innymi słowy, $f(i)$ jest różnicą długości części, na które dzielą obwód wielokąta punkty A_i oraz A_{i+n}. Ponieważ

$$f(i) = 2 \cdot (A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + A_{i+2}A_{i+3} + \ldots + A_{i+n-1}A_{i+n}) - \ell$$

(gdzie ℓ jest obwodem danego wielokąta), to $f(i)$ jest liczbą parzystą. Ponadto mamy

$$|f(i+1) - f(i)| = |2 \cdot A_{i+n}A_{i+n+1} - 2 \cdot A_iA_{i+1}| = 2 \cdot |A_{i+n}A_{i+n+1} - A_iA_{i+1}| \leqslant 2.$$

Zachodzi także równość $f(i) = -f(i+n)$. Stąd wynika, że ciąg liczb

$$f(1), f(2), \ldots, f(n) \text{ oraz } f(n+1) = -f(1)$$

składa się z liczb parzystych, a jego kolejne wyrazy różnią się nie więcej niż o 2. Zatem istnieje takie i, że $f(i) = 0$, czyli punkty A_i oraz A_{i+n} dzielą obwód danego wielokąta na dwie części o jednakowej długości.

Na koniec proponujemy Czytelnikom dwa zadania do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 5. *Niech n, p, q będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Ciąg liczb całkowitych $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ spełnia warunki:*

$$x_0 = x_n \quad \textit{oraz} \quad x_{i+1} - x_i \in \{p, -q\}$$

dla $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Udowodnić, że jeżeli $n > p+q$, to istnieją takie k, ℓ, że $k \neq \ell$ i $\{k, \ell\} \neq \{0, n\}$ oraz $x_k = x_\ell$.

Zadanie 6. *Dany jest wielokąt wypukły o parzystej liczbie boków. Każdy bok wielokąta ma długość 2 lub 3, przy czym liczba boków każdej z tych długości jest parzysta. Dowieść, że istnieją dwa wierzchołki wielokąta, które dzielą jego obwód na dwie części, z których każda zawiera taką samą liczbę odcinków długości 2 i taką samą liczbę odcinków długości 3.*

Zadania

Przygotował Łukasz RAJKOWSKI

M 1636. Udowodnić, że nie istnieją takie nieparzyste liczby x, y, z, że

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 = (z+x)^2.$$

Rozwiązanie na str. 2

M 1637. W międzyszkolnym turnieju gry w warcaby każda para uczestników z różnych szkół rozegrała jedną partię; jeśli uczestnicy pochodzili z tej samej szkoły, nie grali ze sobą. *Singlem* nazwiemy każdy mecz rozegrany przez uczestników tej samej płci, a *miksem* – przez uczestników płci przeciwnej. Na koniec turnieju okazało się, że liczba dziewczynek biorących udział w turnieju różni się o co najwyżej 1 od liczby chłopców. Podobnie, liczba rozegranych singli różniła się o co najwyżej 1 od liczby miksów. Udowodnić, że liczba szkół, z których startowały różne liczby chłopców i dziewcząt, nie przekracza 3.
Rozwiązanie na str. 19

M 1638. Wielomian $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ ma n pierwiastków rzeczywistych (licząc z krotnościami). Wiedząc, że $a_{n-1} = -n$ i $a_{n-2} = \frac{1}{2}n(n-1)$, wyznaczyć a_i dla $0 \leqslant i \leqslant n-3$.
Rozwiązanie na str. 2

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 999. Jednorodnemu walcowi o masie m i promieniu r nadano prędkość kątową ω_0 wokół osi symetrii obrotowej i położono na poziomej podłodze. Przyspieszenie ziemskie wynosi g, a współczynnik tarcia kinetycznego między podłogą i powierzchnią walca wynosi μ. Po jakim czasie τ walec przestanie się ślizgać i zacznie się toczyć ze stałą prędkością kątową? Jaką pracę W wykona siła tarcia? Wskazówka: moment bezwładności I jednorodnego walca, o promieniu r i masie m, wokół jego osi symetrii wynosi: $I = mr^2/2$.
Rozwiązanie na str. 14

F 1000. Przeciętne oko ludzkie rejestruje światło o długościach fali λ mieszczących się w zakresie 380 nm $< \lambda <$ 740 nm. Ile linii widma wodoru człowiek może zaobserwować bezpośrednio? Stała Plancka wynosi $h = 4{,}136 \cdot 10^{-15}$ eV·s, prędkość światła $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, a stała Rydberga $R = 13{,}606$ eV.
Rozwiązanie na str. 15