Zera zmienią jednostkę w miliony

Bartłomiej BZDĘGA

Liczbę całkowitą dodatnią $(k+1)$-cyfrową n możemy zapisać w postaci

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_k \cdot 10^k$$

(kreska nad wyrażeniem informuje, iż nie jest to po prostu mnożenie). Liczbę n możemy oszacować, znając jej pierwszą cyfrę oraz liczbę cyfr. Zachodzą oczywiste nierówności:

$$a_k \cdot 10^k \leqslant n < (a_k + 1) \cdot 10^k,$$

z których warto skorzystać w zadaniach 1, 3, 9 i 10.

Przez $S(n)$ oznaczać będziemy sumę cyfr liczby n. Zauważmy, że liczba

$$n - S(n) = 9a_1 + 99a_2 + 999a_3 + \ldots + 99\ldots 9a_k$$

dzieli się przez 9, zatem suma cyfr liczby naturalnej daje taką samą resztę z dzielenia przez 9, co ta liczba. Tego faktu używamy w zadaniach 1, 2, 4, 5 i 9.

Dzięki algorytmowi pisemnego dodawania mamy nierówność

$$S(m+n) \leqslant S(m) + S(n),$$

która jest pomocna w zadaniach 6, 7 i 8.

Na koniec przypomnimy o pewnej własności dzielenia z resztą, która jest w poniższych zadaniach pomocna: iloczyn liczb całkowitych daje taką samą resztę z dzielenia przez d, co iloczyn ich reszt z dzielenia przez d. Dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

Zadania. *(W każdym zadaniu $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n.)*

1. Rozważmy wszystkie liczby siedmiocyfrowe, w których każda z cyfr $1, 2, \ldots, 7$ występuje dokładnie raz. Udowodnić, że żadna z tych liczb nie jest dzielnikiem innej.
2. Spośród liczb siedmiocyfrowych określonych w poprzednim zadaniu wybierzmy trzy, niekoniecznie różne. Czy ich suma może być kwadratem liczby naturalnej?
3. W zapisie dziesiętnym pewnej dodatniej liczby całkowitej n nie występuje żadna z cyfr 1, 2, 9. Udowodnić, że w zapisie dziesiętnym liczby $3n$ występuje co najmniej jedna z tych cyfr.
4. W zapisie dziesiętnym liczby 2^{29} jest dziewięć cyfr, każda inna. Wiedząc to, bez obliczania 2^{29} wyznaczyć cyfrę, która w tej liczbie nie występuje.
5. Dowieść, że $S(2n^2+3)$ nie jest kwadratem liczby całkowitej dla żadnego naturalnego n.
6. Wykazać, że dla liczb całkowitych dodatnich m i n zachodzi nierówność $S(mn) \leqslant S(m)S(n)$.
7. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, które spełniają równość $S(11^n) = 2^n$.
8. Wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość wyrażenia $\frac{S(2n)}{S(n)}$ dla całkowitych dodatnich n.
9. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba naturalna mniejsza od iloczynu swoich cyfr w zapisie dziesiętnym.
10. Dla pewnego całkowitego dodatniego n liczby 2^n i 5^n mają taką samą pierwszą cyfrę. Wykazać, że tą cyfrą jest 3.
11. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n, dla których $S(3^{n+1}) \leqslant S(3^n)$.

Wskazówki do zadań

1. Wybierzmy liczby a i b spośród danych w zadaniu. Mamy $\frac{a}{b} < 8$. Jeśli $b \mid a$, to niech $k = \frac{a}{b} \in \{1, 2, \ldots, 7\}$. Wówczas $a = bk$. Teraz trzeba zauważyć, że liczby a i b dają resztę 1 z dzielenia przez 9, co wymusza $k = 1$.
2. Suma trzech takich liczb daje resztę 3 z dzielenia przez 9. Wobec tego dzieli się ona przez 3, ale nie przez 9.
3. Niech liczba z zadania będzie $(k+1)$-cyfrowa. Możemy zapisać $3 \cdot 10^k \leqslant n < 9 \cdot 10^k$. Wystarczy teraz wykazać, że jeśli liczba $3n$ ma tyle samo cyfr co n, to jej pierwszą cyfrą jest 9, a jeśli ma o jedną cyfrę więcej, to jej pierwszą cyfrą jest 1 lub 2.
4. Jeśli x jest brakującą cyfrą, to suma cyfr liczby 2^{29} wynosi $1 + 2 + \ldots + 9 - x$. Zauważmy, że liczba 2^6 daje resztę 1 z dzielenia przez 9, więc liczba $2^{29} = (2^6)^4 \cdot 32$ daje resztę 5 z dzielenia przez 9. Wystarczy porównać obie reszty.
5. Kwadrat liczby naturalnej może dawać resztę z dzielenia przez 9 równą 0, 1, 4 lub 7. Liczba $S(2n^2+3)$ daje taką samą resztę z dzielenia przez 9, co $2n^2+3$, czyli 2, 3, 5 lub 8.
6. Zapisując $n = \sum_i 10^i \cdot a_i$ i $m = \sum_j 10^j \cdot b_j$, otrzymamy $S(mn) = S\left(\sum_{i,j} 10^{i+j} a_i b_j\right) \leqslant$ $\leqslant \sum_{i,j} S(10^{i+j} a_i b_j) = \sum_{i,j} S(a_i b_j) \leqslant$ $\leqslant \sum_{i,j} a_i b_j = S(n)S(m)$.
7. Z poprzedniego zadania i indukcji mamy $S(a^k) \leqslant S(a)^k$. Wobec tego dla $n \geqslant 5$ zachodzą nierówności $S(11^n) =$ $= S(161051 \cdot 11^{n-5}) \leqslant 14 \cdot S(11)^{n-5} < 2^n$. Dla $n = 1, 2, 3, 4$ mamy $S(11^n) = 2^n$.
8. Można użyć następujących oszacowań: $\frac{S(2n)}{S(n)} \leqslant \frac{S(n)+S(n)}{S(n)} = 2$ oraz $\frac{S(2n)}{S(n)} = \frac{S(2n)}{S(5 \cdot 2n)} \geqslant \frac{1}{5}$. Trzeba jeszcze wskazać takie n, dla których osiągane są skrajne wartości.
9. Rozważmy liczbę $(k+1)$-cyfrową n o pierwszej cyfrze a. Iloczyn cyfr liczby n nie przekracza $a \cdot 9^k$, natomiast $n \geqslant a \cdot 10^k$. Taka liczba nie istnieje.
10. Niech c będzie pierwszą cyfrą 2^n i 5^n. Zapiszmy $c \cdot 10^k < 2^n < (c+1) \cdot 10^k$ oraz $c \cdot 10^l < 5^n < (c+1) \cdot 10^l$. Mnożąc te dwie nierówności, otrzymamy $c^2 \cdot 10^{k+l} < 10^n < (c+1)^2 \cdot 10^{k+l}$, z czego wnioskujemy, że $k + l = n - 1$ i w konsekwencji $c = 3$.
11. Przypuśćmy, że nierówność $S(3^{n+1}) \leqslant S(3^n)$ zachodzi tylko dla skończenie wielu n. Wtedy istnieje takie N, że dla wszystkich $n \geqslant N$ mamy $S(3^{n+1}) \geqslant S(3^n) + 9$. Stąd dla wszystkich n zachodzi nierówność $S(3^n) \geqslant 9n - c$, gdzie c jest pewną stałą. Z drugiej strony, $3^n < 10^{n/2}$, więc liczba 3^n ma co najwyżej $n/2 + 1$ cyfr.