Trójkąt harmoniczny – bliźniak trójkąta Pascala

Karol GRYSZKA*

*Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Trójkąt Pascala zna praktycznie każdy. Widoczny poniżej z lewej strony trójkąt ma tę własność, że każda liczba jest sumą dwóch liczb stojących bezpośrednio **nad** nią (z wyłączeniem wierzchołka trójkąta oraz jego prawego i lewego boku, gdzie znajdują się jedynki). Z kolei w trójkącie po prawej stronie każda liczba jest sumą dwóch liczb stojących bezpośrednio **pod** nią. Na jego prawym oraz lewym boku znajdują się odwrotności kolejnych liczb naturalnych – *liczby harmoniczne*. Taki obiekt nazywa się **trójkątem harmonicznym**. Konstrukcję obu trójkątów można oczywiście kontynuować w nieskończoność...

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\
1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{1}{1}\\
\frac{1}{2}\quad \frac{1}{2}\\
\frac{1}{3}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{1}{3}\\
\frac{1}{4}\quad \frac{1}{12}\quad \frac{1}{12}\quad \frac{1}{4}\\
\frac{1}{5}\quad \frac{1}{20}\quad \frac{1}{30}\quad \frac{1}{20}\quad \frac{1}{5}\\
\frac{1}{6}\quad \frac{1}{30}\quad \frac{1}{60}\quad \frac{1}{60}\quad \frac{1}{30}\quad \frac{1}{6}\\
\frac{1}{7}\quad \frac{1}{42}\quad \frac{1}{105}\quad \frac{1}{140}\quad \frac{1}{105}\quad \frac{1}{42}\quad \frac{1}{7}
\end{array}$$

Spoglądając na oba trójkąty, można dostrzec pewne zależności zachodzące między nimi. Na przykład liczby w ostatnim widocznym wierszu trójkąta Pascala są dzielnikami mianowników liczb ostatniego wiersza trójkąta harmonicznego. W tym tekście przyjrzymy się dokładniej trójkątowi harmonicznemu.

Niech $P(n,k)$ oznacza k-ty wyraz n-tego wiersza w trójkącie Pascala (wiersze oraz wyrazy numerujemy od 0), a $H(n,k)$ oznacza k-ty wyraz n-tego wiersza w trójkącie harmonicznym (numerujemy od 1).

Wprost z opisu konstrukcji trójkątów otrzymujemy następujące relacje:

$$P(n,k)+P(n,k+1)=P(n+1,k+1),\quad H(n,k)+H(n,k+1)=H(n-1,k).$$

Wartość $P(n,k)$ to $\binom{n}{k}$. Nasuwa się więc pytanie o ogólny wzór dowolnego wyrazu trójkąta harmonicznego.

Twierdzenie 1. *Wartość k-tego wyrazu w n-tym wierszu trójkąta harmonicznego opisuje wzór*

$$H(n,k)=\frac{1}{k\binom{n}{k}},\qquad \textit{co dla } n>1, k>1 \textit{ można zapisać jako } \frac{1}{n\binom{n-1}{k-1}}.$$

Dowód twierdzenia 1.
Rozumowanie przebiega indukcyjnie względem n. Sprawdzenie przypadków $n=1$ oraz $n=2$ zostawiamy Czytelnikowi i przechodzimy do założenia indukcyjnego. Załóżmy zatem, że wzór jest prawdziwy dla pewnego $n>1$ oraz $k=1,\ldots,n$. Wykażemy, że wzór zachodzi dla $n+1$ oraz wszystkich k od 1 do $n+1$. Rozumowanie ponownie przebiega indukcyjnie, przy czym przypadek $k=1$ jest oczywisty. Załóżmy więc, że tożsamość jest prawdziwa dla pewnego $1\leqslant \ell\leqslant n$. Wtedy korzystając z faktu i po stosownych przekształceniach:

$$\begin{aligned}
&H(n,\ell+1)=H(n-1,\ell)-H(n,\ell)=\\
&=\frac{1}{k\binom{n-1}{\ell}}-\frac{1}{\ell\binom{n}{\ell}}=\\
&=\frac{\ell!(n-1-\ell)!n-\ell!(n-\ell)!}{\ell n!}=\\
&=\frac{(\ell-1)!(n(n-1-\ell)!-(n-\ell)!)}{n!}=\\
&=\frac{(\ell+1)!(n-1-\ell)!}{(\ell+1)n!}=\\
&=\frac{1}{(\ell+1)\binom{n}{\ell+1}}.
\end{aligned}$$

Rozumowanie to kończy oba postępowania indukcyjne. □

Z tego wynika następująca zależność między wartościami obu trójkątów

$$H(n,k)=(nP(n-1,k-1))^{-1}.$$

Korzystając z tego wzoru, otrzymujemy na przykład, że piąty wiersz trójkąta harmonicznego to

$$(5\cdot 1)^{-1}\quad (5\cdot 4)^{-1}\quad (5\cdot 6)^{-1}\quad (5\cdot 4)^{-1}\quad (5\cdot 1)^{-1},\ \text{czyli}\ \frac{1}{5}\quad \frac{1}{20}\quad \frac{1}{30}\quad \frac{1}{20}\quad \frac{1}{5}.$$

Twierdzenie 2. *Dla dowolnego n zachodzi równość* $\sum_{k=1}^{n} H(n,k)^{-1}=n2^{n-1}$.

Dowód. Sumę $\sum_{k=1}^{n} H(n,k)^{-1}$ można zapisać w postaci

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}$$

i wystarczy teraz skorzystać ze znanej równości

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}=2^{n-1}.$$ □

Równość $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ otrzymujemy, licząc na dwa sposoby liczbę podzbiorów zbioru n-elementowego.

W trójkącie Pascala można znaleźć wiele ciekawych zależności na sumy wybranych elementów. Jedną z najbardziej zaskakujących jest związek

$$F_n=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n-k-1}{k},$$

gdzie F_n jest n-tą liczbą Fibonacciego. Mniej znaną jest natomiast relacja

$$\sum_{d=k}^{n}\binom{d}{k}=\binom{n+1}{k+1}.$$

$$
\begin{gathered}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad \boxed{35} \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{gathered}
$$

Przez *skos* trójkąta zawsze będziemy oznaczać zbiór liczb stojących na odcinku równoległym do boku trójkąta, o początku w jego boku.

Oznacza to, że jeżeli weźmiemy liczby znajdujące się na skosie trójkąta (dowolnym skosie, ale równoległym do jego boku; patrz rysunek), to suma liczb na tym skosie będzie równa liczbie pod nim (tej, która nie leży na przedłużeniu skosu), na przykład

$$35 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1, \qquad 35 = 20 + 10 + 4 + 1, \qquad 21 = 15 + 5 + 1.$$

Istnieje analogiczna relacja dla trójkąta harmonicznego, którą sformułujemy w kolejnym twierdzeniu.

Twierdzenie 3. *Dla dowolnych n oraz k zachodzi* $H(n,k) = \sum_{m \geqslant n+1}^{\infty} H(m, k+1)$.

Powyższa równość oznacza w szczególności, że każda liczba harmoniczna jest nieskończoną sumą liczb na skosie trójkąta, na przykład $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \ldots$ Co więcej, analogiczna równość jest prawdziwa dla *każdej* liczby w tym trójkącie.

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots$$

$$
\begin{gathered}
\boxed{\tfrac{1}{1}}\\
\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2}\\
\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{6} \quad \tfrac{1}{3}\\
\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{12} \quad \tfrac{1}{12} \quad \tfrac{1}{4}\\
\tfrac{1}{5} \quad \tfrac{1}{20} \quad \tfrac{1}{30} \quad \tfrac{1}{20} \quad \tfrac{1}{5}\\
\tfrac{1}{6} \quad \tfrac{1}{30} \quad \tfrac{1}{60} \quad \tfrac{1}{60} \quad \tfrac{1}{30} \quad \tfrac{1}{6}
\end{gathered}
$$

Dowód. Dla ustalonego $N \geqslant n+1$ możemy, korzystając z rekurencyjnej definicji elementów trójkąta harmonicznego, napisać

$$\sum_{m \geqslant n+1}^{N} H(m, k+1) = \sum_{m \geqslant n+1}^{N} \big(H(m-1,k) - H(m,k)\big) = H(n,k) - H(N,k).$$

Teza twierdzenia wynika teraz z oczywistego faktu, że granica $H(N,k)$ przy N dążącym do nieskończoności wynosi 0. $\square$

Spójrzmy teraz na ułamki znajdujące się wewnątrz trójkąta harmonicznego, czyli te, które nie znajdują się na jego bokach (patrz rysunek obok).

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \ldots$$

$$
\begin{gathered}
\tfrac{1}{1}\\
\tfrac{1}{2} \quad \boxed{\tfrac{1}{2}}\\
\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{6} \quad \tfrac{1}{3}\\
\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{12} \quad \tfrac{1}{12} \quad \tfrac{1}{4}\\
\tfrac{1}{5} \quad \tfrac{1}{20} \quad \tfrac{1}{30} \quad \tfrac{1}{20} \quad \tfrac{1}{5}\\
\tfrac{1}{6} \quad \tfrac{1}{30} \quad \tfrac{1}{60} \quad \tfrac{1}{60} \quad \tfrac{1}{30} \quad \tfrac{1}{6}\\
\tfrac{1}{105}
\end{gathered}
$$

Jaka jest suma wszystkich takich wyrazów? Odpowiedź jest zaskakująco prosta.

Twierdzenie 4. *Zachodzi wzór* $\sum_{n \geqslant 3}^{\infty} \sum_{k=2}^{n-1} H(n,k) = 1.$

Dowód. Z twierdzenia 3 wynika, że $1 = \sum_{n \geqslant 2}^{\infty} H(n,2)$. Korzystając raz jeszcze (i wielokrotnie) z twierdzenia 3, otrzymujemy

$$1 = \sum_{n \geqslant 2}^{\infty} H(n,2) = H(2,2) + \sum_{n \geqslant 3}^{\infty} H(n,2) = \sum_{n \geqslant 3}^{\infty} H(n,3) + \sum_{n \geqslant 3}^{\infty} H(n,2) =$$

$$= H(3,3) + \sum_{n \geqslant 4}^{\infty} H(n,3) + \sum_{n \geqslant 3}^{\infty} H(n,2) = \sum_{n \geqslant 5}^{\infty} H(n,4) + \sum_{n \geqslant 4}^{\infty} H(n,3) + \sum_{n \geqslant 3}^{\infty} H(n,2).$$

Postępujemy tak analogicznie aż do równości

$$1 = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n \geqslant k+1}^{\infty} H(n,k).$$

Zamieniając kolejność sumowania (we wzorze powyżej – sumujemy po skosach), otrzymujemy tezę. $\square$

$$
\begin{gathered}
\tfrac{1}{6}\\
\tfrac{1}{12} \quad \tfrac{1}{12}\\
\tfrac{1}{20} \quad \tfrac{1}{30} \quad \tfrac{1}{20}\\
\tfrac{1}{30} \quad \tfrac{1}{60} \quad \tfrac{1}{60} \quad \tfrac{1}{30}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}
$$

Twierdzenie 4 można uogólnić!

Twierdzenie 5. *Dla dowolnego n i dowolnego k prawdziwa jest równość*

$$H(n,k) = \sum_{m \geqslant n+2}^{\infty} \sum_{\ell = k+1}^{m+k-n-1} H(m, \ell).$$

Dowód powyższego twierdzenia w oparciu o przedstawione powyżej wyniki pozostawiamy Czytelnikowi Dociekliwemu.

$$
\begin{gathered}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad \boxed{35} \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{gathered}
$$

$$35 - 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 3 + 1 + 6 + 4 + 10.$$

Twierdzenia 4 i 5 mają następującą interpretację: każdy element trójkąta harmonicznego jest sumą wszystkich elementów w trójkącie, które leżą poniżej i pomiędzy dwoma skosami zawierającymi daną liczbę. Można zapytać o to, czy istnieje jakaś analogia twierdzenia 6 dla trójkąta Pascala. Czytelnik może sprawdzić, że każdy element trójkąta Pascala pomniejszony o 1 jest sumą wszystkich elementów tego trójkąta, które leżą powyżej i pomiędzy dwoma skosami zawierającymi daną liczbę. Życzymy owocnych poszukiwań kolejnych zależności.