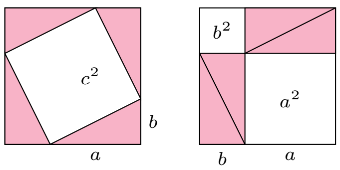
Trudniej, a łatwiej

Piotr CHRZĄSTOWSKI-WACHTEL

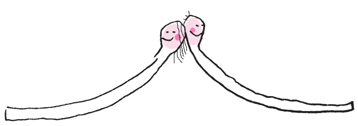


Są twierdzenia łatwe i trudne do udowodnienia. Zazwyczaj im mocniejsze sformułowanie, obejmujące więcej przypadków, tym trudniej się je dowodzi. Tak jest na przykład z twierdzeniem cosinusów i twierdzeniem Pitagorasa, które jest jego szczególnym przypadkiem. Łatwiej jest udowodnić twierdzenie Pitagorasa; można to zrobić nawet w sposób zrozumiały dla przedszkolaka (zobacz rysunek obok). Do dowodu twierdzenia cosinusów trzeba przynajmniej wiedzieć, co to cosinus, w szczególności kąta rozwartego.

Jest jednak metoda dowodzenia, w której dowody mocniejszych twierdzeń bywają łatwiejsze niż ich sformułowań mniej ogólnych. To indukcja matematyczna.

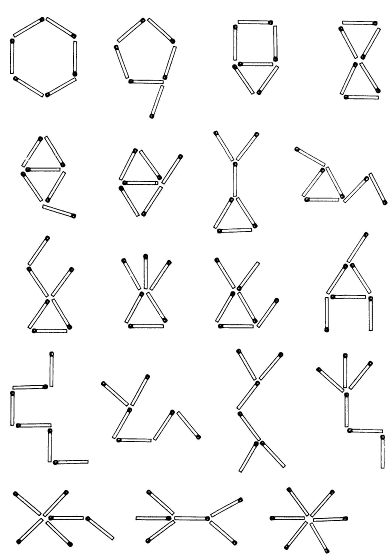
Weźmy taki przykład. Postarajmy się udowodnić, że suma sześcianów początkowych n liczb naturalnych jest pełnym kwadratem, czyli kwadratem pewnej liczby naturalnej. Spróbujmy dowodu indukcyjnego. Sprawdzamy bazę dla $n = 1$. Działa: $1^3 = 1^2$, czyli suma pojedynczego sześcianu jedynki jest kwadratem jedności (dla $n = 0$ zresztą też działa!). Załóżmy teraz, że $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = m^2$ dla pewnego naturalnego m. Mamy wykazać, że $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = m'^2$ dla pewnej liczby naturalnej m'. Stosujemy założenie indukcyjne: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 =$ $= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = m^2 + (n+1)^3 \ldots$ i klops! Tego się nie da już doprowadzić do niczego sensownego. Dowód się zacina.

Wystarczy jednak wzmocnić nieco tezę: nie tylko twierdzić, że jest to pełny kwadrat *jakiejś* liczby, ale ją bezpośrednio wskazać: tą liczbą jest suma początkowych n liczb naturalnych, czyli $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Nasze mocniejsze twierdzenie mówi, że $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Teraz krok indukcyjny działa bez zarzutu: Zakładamy, że $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, i dowodzimy, że $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. Elementarne rachunki nas w tym upewniają: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.



Co się stało? Po prostu z mocniejszych założeń wyciągamy więcej wniosków. A że założenie jest częściowo tezą? Tym lepiej! Nic dziwnego, że przy indukcji matematycznej krok indukcyjny dowodzi się prościej, gdy założenie jest silniejsze. Zobaczmy jeszcze jeden przykład.

Spróbujmy wykazać, że dla każdego n wartość $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} = \sum_{k=1}^{n} k^{-3}$ jest mniejsza od $\frac{5}{4}$. Gdybyśmy użyli zwykłej indukcji, to co prawda baza indukcji by była prawdziwa, bo $1 < \frac{5}{4}$, ale z krokiem indukcyjnym byłoby już trudniej. Załóżmy bowiem, że $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$. Mamy wykazać, że $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{5}{4}$. I widać gołym okiem, że założenie indukcyjne do niczego nam się nie przyda. Co z tego, że suma odwrotności sześcianów aż do n włącznie jest mniejsza od $\frac{5}{4}$, skoro nie wiemy, o ile jest mniejsza i czy $\frac{1}{(n+1)^3}$ tam się jeszcze zmieści?



Wszystkie topologicznie różne układy sześciu zapałek; szczegóły w artykule Jarosława Górnickiego *Zabawa zapałkami* (str. 6).

Widać, że dużego pola manewru nie mamy. Po prostu założenie indukcyjne było zbyt słabe. Spróbujmy zatem wzmocnić tezę, twierdząc, że nie tylko ta suma jest mniejsza od $\frac{5}{4}$, ale wręcz od $\frac{5}{4} - \frac{1}{n^2}$.

Co? Że to wcale nie jest prawda? Faktycznie: już dla $n = 1$ ta nierówność nie zachodzi. Dla $n = 2$ również, nawet dla $n = 3$ okazuje się, że $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27}$ przekracza wartość $\frac{5}{4} - \frac{1}{9}$. Ale dla $n = 4$ już jest OK: $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} < \frac{5}{4} - \frac{1}{16}$, co można sprawdzić za pomocą kalkulatora, albo nawet bez.

Teraz już jest łatwo. Stawiamy hipotezę indukcyjną, że dla $n \geqslant 4$ zachodzi $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{5}{4} - \frac{1}{n^2}$. Baza już jest udowodniona. Pozostaje krok indukcyjny. Zakładamy zatem, że $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4} - \frac{1}{n^2}$, i wykażemy, że $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{5}{4} - \frac{1}{(n+1)^2}$. To już jest proste.

Mamy bowiem na mocy założenia indukcyjnego
$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{5}{4} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^3}$,
a wykazanie, że prawa strona tej nierówności jest mniejsza od $\frac{5}{4} - \frac{1}{(n+1)^2}$, to już jest elementarna algebra. Wystarczy obie strony przemnożyć przez niewątpliwie dodatnią wartość $n^2(n+1)^3$ i zredukować powstałą nierówność do równoważnej oczywistej
$-n^2 - 3n - 1 < 0$.

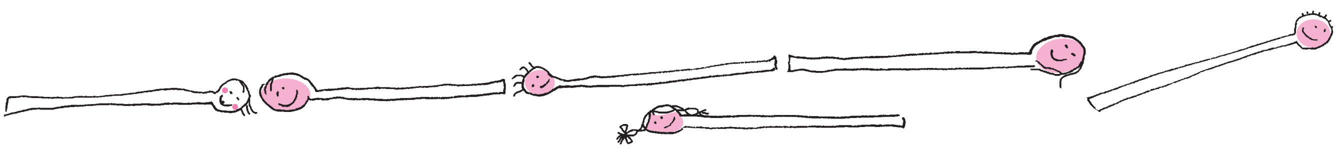
W ten sposób udowodniliśmy, że nierówność ta zachodzi dla wszystkich $n \geqslant 4$. Przypadki, gdy $n < 4$, możemy sprawdzić ręcznie – ostatecznie dla $n = 0, 1, 2, 3$ liczb po prostu wyjściowa nierówność jest spełniona z prawą stroną równą $\frac{5}{4}$, a dla $n \geqslant 4$ nawet mocniejsza, z odjętym składnikiem $\frac{1}{n^2}$ po prawej stronie.

Przy okazji można zadać narzucające się pytanie: czy $\frac{5}{4}$ jest najlepszym przybliżeniem sumy nieskończonego szeregu odwrotności sześcianów? Wiemy, że ciąg jego sum częściowych rośnie wraz z n i ma ograniczenie górne, więc z twierdzenia Weierstrassa wynika, że ma granicę. Czy jest nią $\frac{5}{4}$? Nie. Można lepiej oszacować tę wartość z góry. Próbowało tego wielu matematyków; pierwszym chyba był Euler, któremu nie udało się rozwiązać zagadki do końca. Podał co prawda związek tej granicy, z której istnienia zdawał sobie zresztą sprawę, z innymi sumami parzystych potęg odwrotności liczb naturalnych. Choć udało mu się wyznaczyć dokładne postacie granic szeregów z drugimi i czwartymi potęgami, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$, to na trzeciej potędze się zaciął.

Nic dziwnego. Mimo z górą dwustuletnich starań matematyków do dziś nie znamy wyrażenia definiującego tę wartość; nie wiemy, czy w ogóle takie wyrażenie istnieje. Znamy ponad bilion (czyli 10^{12}) cyfr rozwinięcia dziesiętnego tej liczby, którego początek to 1,2020569031595942853997381615. Wiemy, że jest to liczba niewymierna, choć zostało to udowodnione dopiero w roku 1978 przez francuskiego matematyka Rogera Apéry'ego i od jego nazwiska stała ta jest od tej pory nazywana stałą Apéry'ego. Pojawia się ona zresztą w naturalny sposób przy rozwiązywaniu pewnych zagadnień fizycznych, jak wyznaczanie współczynnika żyromagnetycznego (ilorazu momentu magnetycznego przez moment obrotowy), a także informatycznych przy analizie minimalnych losowych drzew rozpinających graf.

Nie wiemy do tej pory, czy liczba ta jest algebraiczna i czy kiedykolwiek poznamy jej symboliczną postać odnoszącą się na przykład do znanych stałych, takich jak π czy e. Zagadkowa sprawa.

Liczba jest algebraiczna, jeśli jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych. Na przykład $\sqrt{2}$ jest algebraiczny, ponieważ jest pierwiastkiem wielomianu $x^2 - 2$.



Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

W poniższych zadaniach przyjmujemy, że wieża szachowa *atakuje* inną wieżę, jeśli znajduje się w tej samej linii szachownicy (tj. wierszu lub kolumnie) i pomiędzy nimi w tej linii nie znajduje się żadna inna wieża.

M 1627. Wyznaczyć największą możliwą liczbę wież szachowych, które można umieścić na szachownicy $m \times n$ w taki sposób, aby każda wieża była atakowana przez dokładnie jedną inną wieżę.
Rozwiązanie na str. 9

M 1628. Wyznaczyć największą możliwą liczbę wież szachowych, które można umieścić na szachownicy $m \times n$ w taki sposób, aby każda wieża była atakowana przez dokładnie dwie inne wieże.
Rozwiązanie na str. 9

M 1629. Wyznaczyć największą możliwą liczbę wież szachowych, które można umieścić na szachownicy $m \times n$ w taki sposób, aby każda wieża, która nie znajduje się w narożniku szachownicy, była atakowana przez dokładnie trzy inne wieże.
Rozwiązanie na str. 16

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 993. W kolejnych próbach na torze kierowca sprawdza, jaką maksymalną prędkość osiąga nowy model sportowego samochodu. W pierwszej próbie jechał bez pasażerów i osiągnął prędkość $v_1 =$ 200 km/godz. Podczas drugiej próby zabrał do kabiny samochodu 4 inżynierów. Oszacuj, jaką prędkość v_2 kierowca osiągnął w drugiej próbie, jeżeli samochód z kierowcą ma masę 1200 kg, a każdy z inżynierów to dodatkowe 80 kg. Próby były wykonywane w takich samych warunkach i nie zostały w nich osiągnięte granice „wydolności" silnika.
Rozwiązanie na str. 14

F 994. W słynnym doświadczeniu Ottona von Guerickego dwa zaprzęgi po 8 koni rozrywały dwie szczelnie przylegające do siebie miedziane półkule, z których wnętrza wypompowano powietrze. Zakładając, że wewnątrz półkul o średnicy $d = 42$ cm była niemal doskonała próżnia, oszacuj siłę potrzebną do ich rozerwania.
Rozwiązanie na str. 8