Funkcja Eulera

Witold BEDNAREK

Niech $\varphi(n)$ (gdzie n jest dodatnią liczbą naturalną) oznacza funkcję Eulera, czyli liczbę liczb naturalnych nie większych od n i względnie pierwszych z n. Na przykład

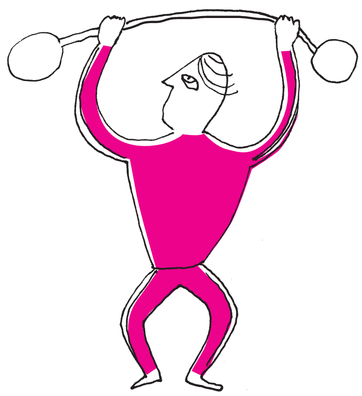
$$\varphi(1) = 1,\ \varphi(2) = 1,\ \varphi(3) = 2,\ \varphi(4) = 2,\ \varphi(5) = 4,\ \varphi(6) = 2.$$

Przypomnijmy dwie powszechnie znane własności funkcji Eulera:

Twierdzenie. *Jeśli $p_1, p_2, \ldots, p_k$ są różnymi liczbami pierwszymi i $m_1, m_2, \ldots, m_k > 0$ są liczbami naturalnymi, to*

$$\varphi(p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}) = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k} \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Twierdzenie (Eulera). *Jeśli $a, n > 0$ są liczbami naturalnymi oraz* $\mathrm{nwd}(a, n) = 1$, *to* $n | a^{\varphi(n)} - 1$.



Zauważmy, że jeśli $n = p$ jest liczbą pierwszą i $\mathrm{nwd}(a, p) = 1$ (czyli $p \nmid a$), to wobec $\varphi(p) = p - 1$ mamy podzielność $p | a^{p-1} - 1$, czyli tezę w małym twierdzeniu Fermata.

Nietrudno jest udowodnić, że dla $n \geqslant 3$ liczba $\varphi(n)$ jest parzysta (Czytelniku, spróbuj sam!). Okazuje się, że nie każda liczba naturalna parzysta jest wartością funkcji Eulera φ. Andrzej Schinzel udowodnił, że dla żadnego naturalnego $k \geqslant 1$ liczba $2 \cdot 7^k$ nie jest wartością funkcji φ.

Jeśli p jest liczbą pierwszą, to $\varphi(p) | p - 1$ (bo $\varphi(p) = p - 1$). W 1932 roku Derrick Henry Lehmer spytał, czy istnieje taka liczba złożona n, że $\varphi(n) | n - 1$. Pytanie to do dzisiaj pozostaje bez odpowiedzi. Można łatwo uzasadnić, że jeśli $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}$, to podzielność $\varphi(n) | n - 1$ jest równoważna podzielności

$$(p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_k - 1) \mid p_1 p_2 \ldots p_k - 1. \tag{1}$$

Oczywiście, gdy $k = 1$, to powyższa podzielność zachodzi (wtedy $n = p_1$ jest liczbą pierwszą). Dla $k \geqslant 2$ nie znaleziono liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_k$ spełniających podzielność (1) i jest wątpliwe, czy takie liczby istnieją. W 1980 roku Geoffrey L. Cohen i Peter Hagis dowiedli, że jeśli n jest liczbą złożoną i zachodzi podzielność (1), to $k \geqslant 14$ i $n > 10^{20}$.

Zajmijmy się teraz równaniem

$$\varphi(x) = m, \tag{2}$$

gdzie $m > 0$ jest daną liczbą naturalną. Można udowodnić, że powyższe równanie

(a) dla $m = 2 \cdot 7^k$ ma 0 rozwiązań,
(b) dla $m = 2 \cdot 3^{6k+1}$ ma 2 rozwiązania,
(c) dla $m = 12 \cdot 7^{2k+1}$ ma 3 rozwiązania.

Zachodzi twierdzenie ogólne (Paul Erdős, Kevin Ford): dla każdej liczby naturalnej $s \geqslant 2$ istnieje taka liczba naturalna m, że równanie (2) ma dokładnie s rozwiązań, co więcej, dla danego $s \geqslant 2$ takich liczb jest nieskończenie wiele.

W 1922 roku Robert Daniel Carmichael sformułował hipotezę: nie istnieje takie m, że równanie (2) ma dokładnie jedno rozwiązanie. Hipotezę można również wyrazić następująco: dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ istnieje taka liczba naturalna $x \neq n$, że $\varphi(x) = \varphi(n)$.

W 1994 roku Aaron Schlafly i Stan Wagon, przeprowadzając obszerne obliczenia numeryczne, wykazali, że jeśli równanie $\varphi(x) = \varphi(n)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie (tj. $x = n$), to $n > 10^{10^7}$, tzn. najmniejszy kontrprzykład (jeśli istnieje) dla hipotezy Carmichaela ma ponad 10 milionów cyfr.

Przejdźmy do równania

$$x - \varphi(x) = k, \tag{3}$$

gdzie $k \geqslant 1$ jest daną liczbą naturalną. Dla $k = 1$ mamy nieskończenie wiele rozwiązań i są nimi wszystkie liczby pierwsze (dlaczego?). Dla $k = 3$ i $k = 5$ mamy rozwiązania odpowiednio $x = 9$ i $x = 25$, co Czytelnik zechce sprawdzić. Niech teraz $k \geqslant 7$ będzie dowolnie ustaloną liczbą nieparzystą. Na mocy wzmocnionej hipotezy Goldbacha (każda liczba większa od 6 jest sumą dwóch różnych liczb pierwszych) istnieją takie różne liczby pierwsze p i q, że $k+1 = p+q$. Przyjmijmy $x = pq$. Wtedy x spełnia równanie (3), gdyż

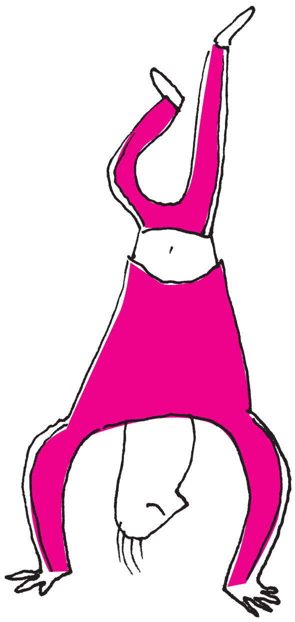
$$x - \varphi(x) = pq - \varphi(pq) = pq - (p-1)(q-1) = p + q - 1 = k.$$

To pokazuje hipotetyczną rozwiązalność równania (3) dla każdego nieparzystego $k \geqslant 1$.

Okazuje się, że równanie (3) może nie mieć rozwiązania dla $k > 0$ parzystych. Najmniejszymi takimi k są: 10, 26, 34, 50, 52, 58, 86, 100. W 1995 roku Jerzy Browkin i Andrzej Schinzel udowodnili następujący fakt:
równanie

$$x - \varphi(x) = 2^n \cdot 509203$$

nie ma rozwiązań dla każdego naturalnego $n \geqslant 1$.



Na koniec kilka zadań dla Czytelnika.

Zadanie 1. Rozwiązać równania

$$\text{(a) } \varphi(x) = 1, \quad \text{(b) } \varphi(x) = 2, \quad \text{(c) } \varphi(x) = 4.$$

Zadanie 2. Wykazać, że równanie

$$x - \varphi(x) = 2^m \quad (m \in \mathbb{N}, m \geqslant 2)$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie.

Zadanie 3. Rozważamy równanie

$$(*) \qquad x - \varphi(x) = p,$$

gdzie p jest daną liczbą pierwszą. Wykazać, że równanie $(*)$:

(a) ma co najmniej jedno rozwiązanie,
(b) ma skończoną liczbę rozwiązań,
(c) może mieć dowolnie wiele rozwiązań (w zależności od p).

Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1615. Udowodnić, że dla dowolnych liczb naturalnych n, m liczba rozwiązań nierówności $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \leqslant m$ w liczbach całkowitych jest równa liczbie rozwiązań nierówności $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_m| \leqslant n$ w liczbach całkowitych.
Rozwiązanie na str. 6

M 1616. Udowodnić, że nie istnieją takie liczby całkowite x, y, że $4xy - x - y$ jest kwadratem liczby całkowitej.
Rozwiązanie na str. 9

M 1617. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach wymiernych, który przyjmuje wartości niewymierne dla niewymiernych argumentów. Wykazać, że stopień P wynosi 1.
Rozwiązanie na str. 9

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 985. Piaszczyste brzegi mórz to zwykle miejsca, gdzie dno morskie powoli opada z odległością od krawędzi plaży. Dlaczego w takich miejscach grzbiety fal dobiegających do brzegu są do tego brzegu równoległe, niezależnie od ich kierunku na głębokiej wodzie?
Rozwiązanie na str. 11

F 986. Jaki jest stosunek średnich gęstości Słońca ρ_S i Ziemi ρ_Z, jeżeli wiadomo, że rok trwa około $T = 365$ dni, przyspieszenie ziemskie $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, promień Ziemi $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ m, a rozmiary kątowe Słońca obserwowanego z Ziemi wynoszą $\delta = 0{,}5°$?
Rozwiązanie na str. 11