KĄCIK POCZĄTKUJĄCEGO OLIMPIJCZYKA 1

Całkowita dyskrecja

Bartłomiej BZDĘGA

W świecie liczb rzeczywistych z nierównością $a < b$ niewiele da się zrobić, natomiast jeśli a i b są liczbami całkowitymi, to możemy ją wzmocnić: $a + 1 \leqslant b$. W zadaniach 1, 2 i 3 korzystamy z tej własności liczb całkowitych.

Nie jest to obserwacja szczególnie głęboka, ale wartościowa dzięki swym licznym zastosowaniom, przeformułowaniom i uogólnieniom. Możemy, dla przykładu, powiedzieć, że pomiędzy dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi nie ma żadnej innej liczby całkowitej, a pomiędzy kwadratami liczb naturalnych nie ma żadnych kwadratów liczb naturalnych; analogicznie dla liczb pierwszych czy wielokrotności ustalonej liczby – w ogólności dla dowolnego ciągu rosnącego. Takie spostrzeżenia są użyteczne w zadaniach 4, 5 i 6.

Można stosować jeszcze nieco inne podejście: w każdym ograniczonym przedziale znajduje się tylko skończenie wiele liczb całkowitych. Jeżeli więc uda się jakąś niewiadomą z zadania oszacować z góry i z dołu, to możemy uwzględnić wszystkie jej możliwe wartości, rozpatrując kilka przypadków. Takie postępowanie stosujemy w zadaniach 7 i 8.

Użyteczny bywa również następujący wniosek: jeśli w pewnym zbiorze znajdziemy n różnych liczb naturalnych, to co najmniej jedna z nich jest większa lub równa n. Ten motyw występuje w zadaniach 9 i 10.

Zadania. (*Uwaga.* Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną.)

1. Udowodnić, że nie istnieją liczby naturalne a, b i c, które spełniałyby równość $a^a + b^b = c^c$.

2. Wykazać, bez powoływania się na Wielkie Twierdzenie Fermata, że jeśli liczby naturalne a, b, c oraz $n \geqslant 2$ spełniają równość $a^n + b^n = c^n$, to $a, b, c > n$.

3. Ciąg (a_n) liczb naturalnych spełnia warunki $a_{2n} = 3a_n - 1$ i $a_{2n+1} = 3a_n + 1$ dla wszystkich naturalnych n. Dowieść, że jest to ciąg rosnący.

4. Dowieść, że sumę dwóch kolejnych liczb pierwszych większych od 2 można przedstawić w postaci iloczynu trzech liczb naturalnych większych od 1.

5. Liczby a i b są naturalne. Dowieść, że istnieje taka liczba naturalna n, dla której $a \cdot 2^n + b$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

6. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony, rosnący ciąg liczb naturalnych (a_n), który spełnia warunki: $a_n \mid a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ oraz $a_n < a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ dla wszystkich $n \geqslant 4$.

7. Dla jakich liczb naturalnych n zachodzi podzielność $1 + 2^n + 4^n \mid 1 + 2^{n+1} + 4^{n+1}$?

8. Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych (a, b), dla których liczby $a^3 + 6ab + 1$ i $b^3 + 6ab + 1$ są sześcianami liczb naturalnych.

9. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą liczbami naturalnymi. Dowieść, że $\mathrm{NWW}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant n \cdot \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

10. Zbiór A stanowi $n \geqslant 4$ liczb naturalnych, przy czym spełniony jest warunek $\mathrm{NWW}(a, b) > c$ dla wszystkich parami różnych $a, b, c \in A$. Dowieść, że suma odwrotności elementów zbioru A jest mniejsza od 2.

Wskazówki do zadań

1. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że $a^a + b^b = c^c$. Bez straty ogólności $a \geqslant b$. Można z tego wywnioskować nierówność $2a^a \geqslant (a+1)^{a+1}$, która prowadzi do sprzeczności.

2. Bez utraty ogólności niech $a \leqslant b < c$. Należy uzasadnić i wykorzystać nierówność $c^n \geqslant (b+1)^n > b^n + nb^{n-1}$, z której da się wywnioskować, że $a > n$.

3. Dość łatwo wykazać, że $a_2 > a_1$. Załóżmy indukcyjnie, przy ustalonym $n \geqslant 2$, że $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Trzeba dowieść, że $a_{n+1} > a_n$. Należy tu rozważyć dwa przypadki: $n = 2t$ oraz $n = 2t + 1$ dla pewnego całkowitego dodatniego t. Pierwszy przypadek jest natychmiastowy i nie wymaga nawet skorzystania z założenia indukcyjnego. W drugim korzystamy z nierówności $a_{t+1} > a_t$, którą zapiszemy w postaci $a_{t+1} \geqslant a_t + 1$.

4. Jaką liczbą jest średnia arytmetyczna dwóch kolejnych liczb pierwszych, większych od 2?

5. Przypuśćmy, że liczba $a \cdot 2^n + b$ jest kwadratem dla każdego naturalnego n. Wtedy liczby $a \cdot 2^{n+2} + b$ i $4(a \cdot 2^n + b)$ też są kwadratami, a różnica między nimi dla odpowiednio dużych n jest za mała.

6. Przypuśćmy, że taki ciąg istnieje. Wykazujemy przez indukcję, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = 2a_n$ dla wszystkich $n \geqslant 4$. Z tego trzeba wywnioskować równość $a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n$ dla wszystkich $n \geqslant 4$, a to prowadzi do sprzeczności.

7. Iloraz $\frac{1+2^{n+1}+4^{n+1}}{1+2^n+4^n}$ jest liczbą naturalną i dość łatwo oszacować go z góry i z dołu. Potem rozważamy wszystkie możliwości.

8. Przyjmijmy, że $a \geqslant b$. Wtedy $a^3 < a^3 + 6ab + 1 \leqslant a^3 + 6a^2 + 1 < (a+2)^3$, więc $a^3 + 6ab = (a+1)^3$, czyli $a = 2b + 1$. Podstawiając tę wartość, uzyskujemy oszacowania $b^3 < b^3 + 6ab + 1 < (b+4)^3$ i mamy trzy przypadki do rozważania.

9. Niech $W = \mathrm{NWW}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Liczby $\frac{W}{a_1}, \frac{W}{a_2}, \ldots, \frac{W}{a_n}$ są naturalne i różne.

10. Niech M będzie największą liczbą w zbiorze A. Każde $a \in A$ ma $\lfloor M/a \rfloor$ wielokrotności, które nie przekraczają M. Z treści zadania wynika, że wszystkie te wielokrotności są różne.