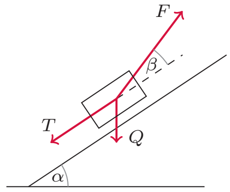
Rozwiązanie zadania F 955.
Na paczkę poza siłą F działa skierowana pionowo siła ciężkości Q oraz równoległa do powierzchni pochylni siła tarcia T.



Rozłóżmy siły działające na paczkę na składowe: prostopadłą do pochylni $N = Q\cos\alpha - F\sin\beta$ i równoległą $S = F\cos\beta - Q\sin\alpha - T$. Siła tarcia $T = fN = f(Q\cos\alpha - F\sin\beta)$. Wciąganie paczki oznacza, że $S \geqslant 0$. Podstawiając poprzednio uzyskane wzory, otrzymujemy:

$$F\cos\beta \geqslant Q\sin\alpha - f(Q\cos\alpha - F\sin\beta).$$

Skąd wyznaczamy:

$$F \geqslant \frac{Q(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{\cos\beta + f\sin\beta}.$$

Minimalna wartość siły odpowiada maksymalnej wartości mianownika wyrażenia. Współczynnik tarcia możemy wyrazić jako $f = \operatorname{tg}\phi$ i otrzymać warunek:

$$F \geqslant \frac{Q(\sin\alpha\cos\phi + \sin\phi\cos\alpha)}{\cos\beta\cos\phi + \sin\phi\sin\beta} = Q\frac{\sin(\alpha+\phi)}{\cos(\beta-\phi)}.$$

Maksimum mianownika otrzymujemy, gdy $\beta = \phi$, czyli $\operatorname{tg}\beta = f$.

Jak powstały wszystko opisujące liczby

Marek KORDOS

Pierwszy etap pitagoreizmu głosił hasło *wszystko jest liczbą*: pożądaną Harmonię Świata da się wyrazić jako stosunek liczb (dziś nazywanych naturalnymi), przy czym jest ona tym pełniejsza, im liczby te są mniejsze.

Wykrycie, iż stosunek przekątnej kwadratu do jego boku nie da się opisać w ten sposób, spowodował kryzys, w którego wyniku od kultu liczb odstąpiono (*liczby zostawmy kupczykom*), wiążąc Harmonię z proporcjami geometrycznymi i złotą proporcję wynosząc na ołtarze. Ten drugi etap pitagoreizmu uformował geometrię naszej cywilizacji w kształcie, jaki ma ona do dziś.

Ale owe lękliwe porzucenie liczb nie mogło podobać się ambitnym uczniom Akademii Platońskiej. I faktycznie je przełamali. Stworzyli w tym celu pierwszą w dziejach teorię aksjomatyczną – była to *teoria wielkości jednego rodzaju*. Oto jej aksjomaty:

Bohaterowie tej opowieści żyli sto lat przed Euklidesem i 250 lat przed Archimedesem.

- **Wielkości jednego rodzaju dają się porównać** (a więc mamy zawsze $A > B$, $A = B$ lub $A < B$);
- **Dla dwóch wielkości jednego rodzaju istnieje wielkość tegoż rodzaju, będąca ich sumą;**
- **Istnieje wielkość uzupełniająca mniejszą z wielkości do większej;**
- **Wielkość można n-krotnie zwielokrotnić dla każdego naturalnego n;**
- **Dowolną wielkość A można zwielokrotnić tak, by okazała się większa od z góry danej wielkości B,**

ten ostatni warunek został później nazwany *aksjomatem Archimedesa*.

Dalej pomysły poszły już dwiema, zdecydowanie odmiennymi, drogami.

Teajtetos (−410; −368) stworzył to, co dziś nazywamy algorytmem Euklidesa. Mianowicie stwierdził, że stosunek dwóch wielkości jednego rodzaju można opisać za pomocą poniższej procedury:

ogólnie	gdy wielkości są liczbami
$A = n_0 \cdot B + R_1,$	$1517 = 1 \cdot 1073 + 444,$
$B = n_1 \cdot R_1 + R_2,$	$1073 = 2 \cdot 444 + 185,$
$R_1 = n_2 \cdot R_2 + R_3,$	$444 = 2 \cdot 185 + 74,$
$R_2 = n_3 \cdot R_3 + R_4,$	$185 = 2 \cdot 74 + 37,$
$R_3 = n_4 \cdot R_4 + R_5$	$74 = 2 \cdot 37.$
...	

Procedura ta czasami się kończy (w przypadku liczb naturalnych zawsze), a czasami nie (przykłady dalej). Zawsze natomiast zamienia stosunek wielkości A/B na specyficzny ciąg liczb naturalnych $(n_0; n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots)$ zwany *ułamkiem ciągłym* lub *łańcuchowym*. Tak można wyrazić stosunek dowolnych dwóch wielkości jednego rodzaju (np. długości, ciężaru, pola powierzchni itp.), a więc każdą (dodatnią) liczbę rzeczywistą.

Przecinki w tym zapisie są niezbędne, gdyż – jak zapewne zauważy Czytelnik Skrupulatny – na każdym miejscu pojawić się może dowolnie wielka liczba.

W przykładzie liczbowym będzie to (1; 2, 2, 2, 2), czasami zapisywane pretensjonalnie jako

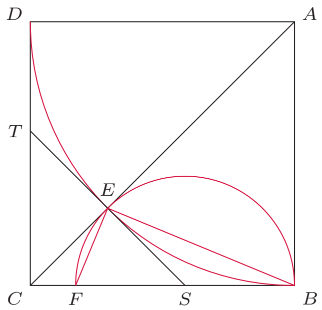
$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Zapis taki jest przydatny (jak będzie widać dalej), a powstaje on z inaczej zapisanego algorytmu Euklidesa: wyłączmy całości, resztę (mniejszą wobec tego od 1) odwracamy, wyłączamy całości, resztę odwracamy, wyłączamy i tak dalej. Widać to obok.

$$\frac{1517}{1073} = 1 + \frac{444}{1073} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1073}{444}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{185}{444}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{444}{185}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{74}{185}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{74}{36}}}}}.$$



Zobaczmy, jak to działa w tym najbardziej wówczas nerwowym punkcie – w przypadku stosunku przekątnej kwadratu do jego boku. Narysujmy ćwiartkę okręgu o środku A i promieniu AB (rysunek), a następnie styczną do niego w punkcie E. Jak łatwo zauważyć, powstały cztery odcinki równej długości (BS, SE, ET, TD). Gdy narysujemy półokrąg o środku S i promieniu SB, powstanie jeszcze jeden odcinek o tej długości: SF. Przystąpmy teraz do rachunków.

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{CE}{AB} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{CF}{CE}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{CE}{AB}}.$$

Wyjaśnienia wymaga jedynie ostatnia z równości. Bierze się ona stąd, że trójkąty BCE i ECF są podobne (kąt przy wierzchołku C jest wspólny, a $\sphericalangle CBE = \sphericalangle CEB$ jako kąt wpisany i dopisany oparte na łuku EF).

Z przeprowadzonego rachunku wynika, że sytuacja będzie się powtarzać bez końca, a więc stosunek przekątnej kwadratu do jego boku to ułamek łańcuchowy zaczynający się od 1 i mający następnie nieskończony ciąg dwójek, co zapisuje się $(1; \overline{2})$.

Oczywiście (żyjąc ponad dwa tysiące lat później) możemy to zrealizować, rozwijając $\sqrt{2}$ w ułamek łańcuchowy:

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} \quad \text{itd.}$$

Ułamki łańcuchowe były przyjęte bardzo sympatycznie, bo nawiązywały do opisu Harmonii przez liczby naturalne – najbardziej harmoniczna była złota proporcja, gdyż opisywały ją same jedynki $(1; \overline{1})$:

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \quad \text{itd.}$$

Ułamki łańcuchowe mają szereg interesujących własności, np.:

– jak można było zauważyć z przykładu liczbowego, liczby wymierne rozwijają się w ułamki skończone;

– ułamki okresowe są pierwiastkami równań kwadratowych o współczynnikach wymiernych;

– niewymierne pierwiastki kwadratowe z liczb wymiernych rozwijają się w ułamki w pewnym stopniu symetryczne, a mianowicie postaci $(a; \overline{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_3, b_2, b_1, 2a})$;

ponieważ to dziwne, rozpatrzmy przykład ułamka $(2; \overline{2, 4})$:

oznaczmy $(0; \overline{2, 4})$ przez $1/y$, wówczas

$$y = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{y}} = 2 + \frac{y}{4y + 1} = \frac{9y + 2}{4y + 1}, \quad \text{czyli } 4y^2 - 8y - 2 = 0,$$

wobec tego

$$y = \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \quad \text{i} \quad (2; \overline{2, 4}) = 2 + \frac{1}{y} = 2 + \frac{2}{2 + \sqrt{6}} = 2 + \frac{2(\sqrt{6} - 2)}{2} = \sqrt{6}.$$

Poważniejszą własność ułamków łańcuchowych odkrył w XVIII wieku Lagrange:

redukt ułamka łańcuchowego liczby n jest jej najlepszym wymiernym przybliżeniem.

Sformułowanie to wymaga objaśnienia terminu *najmniejsze wymierne przybliżenie*, niezgodnego z naszymi przyzwyczajeniami językowymi. Otóż jest to takie przybliżenie wymierne, że lepsze od niego musi mieć większy mianownik.

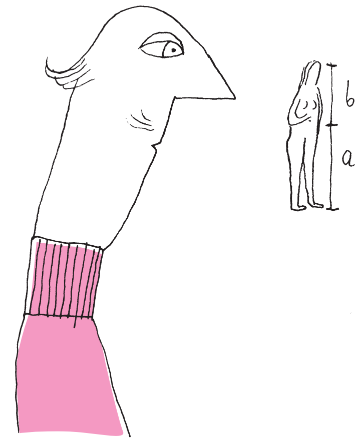
Tak więc z podanego przy algorytmie Euklidesa przykładu liczbowego wynika, że jednym z najlepszych przybliżeń wymiernych $\sqrt{2}$ jest $41/29$ (to skrócone $1517/1073$), ale też $3/2$, $7/5$ czy $17/12$.

Skoro propozycja opisania liczb rzeczywistych za pomocą ułamków łańcuchowych jest tak atrakcyjna, to czemu uczymy się zupełnie innego sposobu patrzenia na nie?

Dwie uwagi o stosowaniu algorytmu Euklidesa do liczb naturalnych – zilustrowane na rozpatrzonym już przykładzie liczbowym.

Pierwsza uwaga dotyczy tego, że ostatnia niezerowa reszta w algorytmie Euklidesa to największy wspólny dzielnik poddanych temu algorytmowi liczb – wystarczy spostrzec, że po natrafieniu na jakikolwiek wspólny dzielnik algorytm zatrzymałby się.

Jeśli natomiast przedstawiony poprzednio rachunek napiszemy od końca, otrzymamy
$37 = 185 - 2 \cdot 74 =$
$= 185 - 2(444 - 2 \cdot 185) =$
$= 5 \cdot 185 - 2 \cdot 444 =$
$= 5(1073 - 2 \cdot 444) - 2 \cdot 444 =$
$= 5 \cdot 1073 - 12 \cdot 444 =$
$= 5 \cdot 1073 - 12(1517 - 1073) =$
$= 17 \cdot 1073 - 12 \cdot 1517$
(faktycznie to $18241 - 18204$).
Czytelnik Uważny zobaczy w tym rozumowaniu dowód, że
dla dowolnych liczb naturalnych n i m istnieją takie liczby całkowite a i b, że $a \cdot n + b \cdot m = \mathrm{NWD}(n, m)$.



Jakąś częścią odpowiedzi jest fakt, że była też inna propozycja, przedstawiona przez Eudoksosa (−408; −355). On nie przedstawiał proporcji wielkości jednego rodzaju za pomocą ciągu liczb naturalnych, lecz opisywał ją poprzez jej dolne i górne przybliżenia wymierne. A robił to tak.

Proporcja wielkości jednego rodzaju A i B jest równa proporcji wielkości jednego (ale możliwe, że zupełnie innego) rodzaju α i β, gdy dla dowolnych liczb naturalnych n i m zachodzą warunki:

jeśli $n \cdot A > m \cdot B$, to $n \cdot \alpha > m \cdot \beta$;
jeśli $n \cdot A = m \cdot B$, to $n \cdot \alpha = m \cdot \beta$;
jeśli $n \cdot A < m \cdot B$, to $n \cdot \alpha < m \cdot \beta$.

A gdzie tu są zapowiadane przybliżenia wymierne? Popatrzmy na to tak, zakładając przez chwilę, że zachodzi pierwsza sytuacja:

jeśli $\frac{A}{B} > \frac{m}{n}$, to $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{m}{n}$,
zatem $\frac{A}{B}$, jak i $\frac{\alpha}{\beta}$ mają takie same wymierne przybliżenia dolne.

Trzeci przypadek wskazuje, że $\frac{A}{B}$, jak i $\frac{\alpha}{\beta}$ mają te same przybliżenia górne.

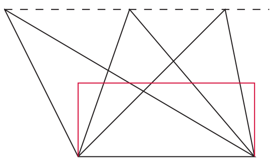
Łącznie więc proporcja jest wyznaczona przez zbiór wszystkich swoich wymiernych przybliżeń dolnych i przybliżeń górnych. Coś takiego nazywamy dziś przekrojem Dedekinda i to jest obowiązujący od stuleci sposób uprawiania liczb rzeczywistych.

Nazwisko Dedekinda stało się nazwą podziału liczb wymiernych na dwie części o tej własności, że każda liczba w jednej z nich jest mniejsza od każdej liczby w drugiej, dlatego że podczas gdy Eudoksos mówił, iż każda proporcja, czyli liczba, to przekrój liczb wymiernych, Dedekind dodał: i każdy przekrój to liczba. Tym sposobem pojawiło się wiele liczb, o jakich matematycy nie mieli pojęcia. Okazało się wręcz, że liczby praktycznie stosowane przez matematyków to tylko dająca się zaniedbać mniejszość.

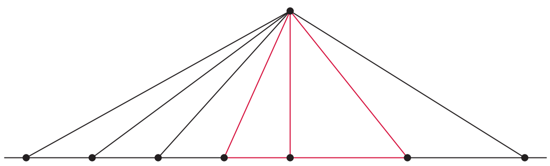
Dziś może nam być trudno wyobrazić sobie świat bez – niejako danych nam od urodzenia – liczb rzeczywistych. Wyobraźmy sobie jednak, że ich nie ma i wykażmy za Euklidesem (VI księga *Elementów*), że

stosunek pól dwóch trójkątów o równych wysokościach jest równy stosunkowi ich podstaw (pamiętajmy: pola i odcinki to są wielkości różnych rodzajów).

Najpierw spostrzeżenie pomocnicze: *pola trójkątów o równych wysokościach i podstawach są równe* – dowodzi się go nożyczkami (Czytelniku, czy masz nożyczki?), rozcinając każdy taki trójkąt na trzy kawałki i składając z niego prostokąt o jednym boku równym podstawie, a drugim – połowie wysokości.



Skoro tak, to możemy dwa trójkąty, o których mówi twierdzenie, narysować jako prostokątne. I możemy je zestawić tak, aby ich równe (bo równe wspólnej wysokości) przyprostokątne pokryły się.



Teraz odkładamy n razy w lewo podstawę lewego trójkąta i m razy w prawo podstawę prawego trójkąta. Otrzymane punkty łączymy z górnym wierzchołkiem wspólnej przyprostokątnej, otrzymując na lewo n trójkątów o polach równych lewemu kolorowemu trójkątowi, a na prawo m trójkątów o polach równych kolorowemu prawemu trójkątowi (tu $n = 4,\ m = 2$).

Gdy złożymy rysunek wzdłuż wspólnej przyprostokątnej, to n-krotna lewa podstawa będzie większa od m-krotnej prawej wtedy i tylko wtedy, gdy n-krotne lewe pole będzie większe od m-krotnego pola prawego.

Wynalazek liczb rzeczywistych to, zdaniem wielu, największy wynalazek matematyczny wszech czasów. Nad pomysłem Eudoksosa rozpływali się w zachwycie zwłaszcza Archimedes i – wiele lat później – Newton. Ten ostatni swój podziw wyrażał, podkreślając, że nie jest możliwe podzielenie rozciągłości w przestrzeni przez rozciągłość w czasie, bo to zupełnie inne rzeczy – jest natomiast możliwe podzielenie liczby mierzącej rozciągłość w przestrzeni przez liczbę mierzącą rozciągłość w czasie – bo to takie same liczby! W wyniku dzielenia otrzymamy wówczas liczbę, której znaczenie (w tym przypadku zapewne prędkość) musimy ustalić.

Istnieje jeszcze jeden powód, który mógł spowodować „wygraną” koncepcji Eudoksosa. Podał on bowiem bardzo piękny sposób mierzenia zwany całką Eudoksosa, całkowaniem Starożytnych bądź metodą wyczerpywania, który służył matematykom aż do XVI wieku. Ale to już inna historia.

Tak więc liczby rzeczywiste pozwoliły na zastosowanie matematyki do wszelkich zjawisk, bo każde z nich opisujemy tymi samymi liczbami (co faktycznie w koncepcji Eudoksosa lepiej widać).