Konsekwencje twierdzenia Dirichleta

Słynne twierdzenie Dirichleta głosi, że jeżeli liczby naturalne $a, r \geqslant 1$ są względnie pierwsze, to ciąg arytmetyczny $a, a+r, a+2r, \ldots$ zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. Przedstawimy kilka wniosków płynących z tego twierdzenia.

Wniosek A

W każdym takim ciągu dla każdej liczby naturalnej s istnieje nieskończenie wiele wyrazów będących iloczynami s różnych liczb pierwszych. Dowód tego stwierdzenia można znaleźć w książeczce Wacława Sierpińskiego „250 zadań z elementarnej teorii liczb” (WSiP, Warszawa 1986, zadanie nr 70).

Wniosek B

Dla każdej liczby naturalnej $m \geqslant 1$ istnieje taka liczba pierwsza $p > 2m$, że przedziały $[p-2m, p)$ i $(p, p+2m]$ nie zawierają liczby pierwszej. Dowód powyższego stwierdzenia znajduje się w moim artykule *Tryptyk o liczbach pierwszych* w Δ^8_{00}.

Wniosek C

Jeżeli w takim ciągu pewien wyraz jest k-tą potęgą liczby naturalnej, to ciąg ten zawiera nieskończenie wiele k-tych potęg liczb pierwszych.

Dowód Andrzeja Schinzla (korespondencja prywatna). Załóżmy, że $b^k \equiv a \bmod r$ dla pewnego $b \in \mathbb{N}^+$. Skoro $\mathrm{NWD}(a, r) = 1$, to wynika stąd, że $\mathrm{NWD}(b, r) = 1$. Zatem na mocy twierdzenia Dirichleta istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p, że $p \equiv b \bmod r$. W konsekwencji $p^k \equiv b^k \bmod r$, czyli $p^k \equiv a \bmod r$, co kończy dowód.

Wniosek D

Dla dowolnej liczby naturalnej $k \geqslant 1$ ciąg arytmetyczny $1, 1+r, 1+2r, \ldots$ zawiera nieskończenie wiele k-tych potęg liczb pierwszych.

Uzasadnienie. Wystarczy zauważyć, że $a = 1 \equiv 1^k \bmod r$ i skorzystać z poprzedniego wniosku.

Wniosek E

Niech $a, r \geqslant 1$ będą liczbami naturalnymi względnie pierwszymi. Wówczas dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant 1$ istnieje nieskończenie wiele takich par p, q liczb pierwszych, że pewien wyraz ciągu arytmetycznego $a, a+r, a+2r, \ldots$ jest postaci pq^k.

Dowód. Niech $k \geqslant 1$ będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną. Niech q będzie dowolnie ustaloną liczbą pierwszą, niedzielącą r. Skoro liczby q^k i r są wtedy względnie pierwsze, to istnieją takie liczby naturalne $s, t \geqslant 1$, że

$$sq^k - tr = 1. \qquad (*)$$

Przy tym widać, że liczby s i r są względnie pierwsze. Ponadto z założenia liczby a i r są względnie pierwsze. Wynika stąd, że $\mathrm{NWD}(as, r) = 1$. Zatem, wykorzystując twierdzenie Dirichleta, stwierdzamy, że ciąg arytmetyczny $as + r, as + 2r, as + 3r, \ldots$ zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. Niech więc $m \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $p = as + mr$ będzie liczbą pierwszą i przy tym takich liczb p jest nieskończenie wiele. Połóżmy $n = 1 + at + mq^k$. Wtedy n-ty wyraz ciągu arytmetycznego $a, a+r, a+2r, \ldots$ jest, wobec $(*)$, równy:

$$a + (n-1)r = a + (at + mq^k)r = a(1 + tr) + mq^k r = asq^k + mq^k r =$$
$$= (as + mr)q^k = pq^k.$$

Wniosek F

Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, których zapis dziesiętny kończy się na:

$$11\ldots1, \quad 33\ldots3, \quad 77\ldots7, \quad 99\ldots9.$$

Dowód tej własności pozostawiam Czytelnikowi. Powodzenia!

Witold BEDNAREK

Rozwiązanie zadania F 947.
Z informacji $R = r_0 A^{1/3}$ wynika, że objętość jądra jest proporcjonalna do liczby nukleonów, a więc średnio, na każdy nukleon przypada objętość kuli o promieniu r_0. Tym samym możemy przyjąć, że nieoznaczoność każdej ze współrzędnych nukleonu wynosi r_0. Zgodnie z zasadą nieoznaczoności dla współrzędnej x mamy $\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar/2$, gdzie p_x oznacza pęd w kierunku x. Analogiczne nierówności spełnione są dla współrzędnych i pędów w kierunkach y i z. Pozwala to wyznaczyć nieoznaczoność pędu w każdym z kierunków $i = x, y, z$:

$$\Delta p_i \approx p_i \geqslant \frac{\hbar}{2r_0}.$$

Ruch nukleonu odbywa się w ograniczonym obszarze i wobec tego ma charakter oscylacyjny, co pozwala nam utożsamić nieoznaczoność pędu Δp_i z jego wartością p_i. Dla energii kinetycznej E_k ruchu nukleonu otrzymujemy:

$$E_k = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2M} \geqslant \frac{3(\hbar c)^2}{8Mc^2 r_0^2},$$

a po podstawieniu danych liczbowych $E_k \gtrsim 10\,\mathrm{MeV}$. Wartość średniej energii wiązania E_B nukleonu musi być większa od jego energii kinetycznej. Otrzymujemy oszacowanie $E_B \gtrsim 10\,\mathrm{MeV}$. Dla ciężkich jąder mierzona średnia energia wiązania na nukleon wynosi około $8\,\mathrm{MeV}$.

Rozwiązanie zadania F 948.
W chwili zastygania skały znajdują się w niej jony uranu, a nie ma jonów ołowiu. Wszystkie jony ^{206}Pb znajdowane w skale pochodzą więc z późniejszych rozpadów jonów ^{238}U. Niech U_0 oznacza początkową liczbę jonów ^{238}U w próbce. Ich liczba po czasie t wynosi

$$U(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t \ln 2}{t_{1/2}}\right),$$

a liczba jonów ^{206}Pb wynosi $U_0 - U(t)$, bo wszystkie powstały w wyniku rozpadu ^{238}U. Stosunek liczby jonów ^{206}Pb do liczby jonów ^{238}U, wynosi więc

$$x = 1 - \exp\left(-\frac{t \ln 2}{t_{1/2}}\right).$$

Stąd otrzymujemy wiek skały

$$t = t_{1/2} \frac{\ln(x+1)}{\ln(2)} \approx 2,6 \cdot 10^9 \text{ lat}.$$