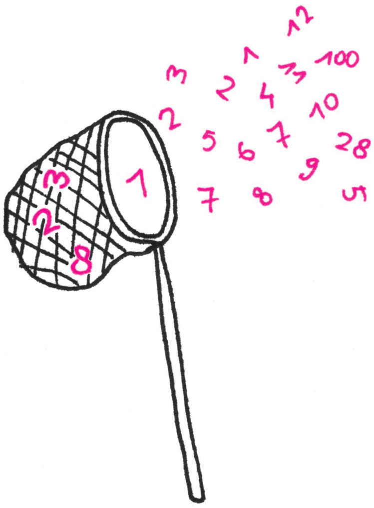
Polowanie na ciągi

*Bartłomiej PAWLIK**



W 1964 roku amerykańsko-brytyjski matematyk Neil Sloane zaczął kolekcjonować znane ciągi liczb całkowitych. Niewinne hobby, motywowane zbadaniem własności kilku ciągów, które pojawiły się podczas pracy nad jego rozprawą doktorską, szybko przerodziło się w duże przedsięwzięcie. W efekcie zostały opublikowane dwie książki *A Handbook of Integer Sequences* (wydana w roku 1973, zawierająca 2372 ciągi) oraz *The Encyclopedia of Integer Sequences* (z 1995 roku, 5847 ciągi). W 1996 roku, gdy liczba zgromadzonych ciągów przekroczyła 10 000, dalsze ich przechowywanie w postaci książkowej stało się bardzo niepraktyczne. Sloane postanowił stworzyć internetową bazę ciągów, dziś figurującą pod nazwą OEIS (*The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*). Baza zawiera obecnie około 270 000 ciągów i, aby uświadomić sobie jej wartość jako przydatnego narzędzia w pracy badawczej, wystarczy wspomnieć, że już ponad 4500 artykułów naukowych zawiera informację: *Otrzymanie tego wyniku nie byłoby możliwe bez pomocy OEIS.*

Znalezienie nietrywialnego ciągu liczb całkowitych, który nie figuruje na wspomnianej liście, nie jest łatwym zadaniem. W niniejszym tekście zaprezentuję, w jaki sposób udało się upolować jeden okaz. Polowanie zacznijmy od próby znalezienia odpowiedzi na właściwie błahe pytanie:

k	$k!$	$\lambda(k!)$
0	1	1
1	1	1
2	2	1
3	6	1
4	24	2
5	120	3
6	720	3
7	5040	4
8	40320	5
9	362880	6

Ile jest liczb naturalnych k, takich, że liczba $k!$ ma dokładnie k cyfr?

Niech $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją określającą liczbę cyfr danej liczby (przykładowo $\lambda(2016) = 4$). Powyższe pytanie możemy sformułować teraz w następujący sposób: ile rozwiązań ma równanie $k = \lambda(k!)$? Tabela obok przedstawia wartości funkcji $\lambda(k!)$ dla małych k.

Jak widać, wśród liczb jednocyfrowych jest tylko jedno rozwiązanie (liczba 1! ma dokładnie jedną cyfrę). Bardzo szybki wzrost wartości funkcji $k!$ sprawia, że poszukiwanie większych rozwiązań „na piechotę” jest niezwykle nieporęczne. Z drugiej strony szybki wzrost sugeruje, że liczba rozwiązań jest skończona. Zauważmy, że liczba 100! ma o dwie cyfry więcej niż 99!. Ujmując to nieco ogólniej, jeżeli $100 \leqslant k < 1000$, to

$$\lambda((k-1)!) + 2 \leqslant \lambda(k!) \leqslant \lambda((k-1)!) + 3.$$

Powyższa nierówność wynika z faktu, że gdy pomnożymy dowolną liczbę przez liczbę trzycyfrową, liczba jej cyfr zwiększy się o 2 lub 3. Najmniejsze k, takie, że $\lambda(k!) = \lambda((k-1)!) + 3$, to $k = 104$.

Z powyższych nierówności wynika oszacowanie:

$$\lambda(200!) \geqslant \lambda(100!) + 2 \cdot 100 = \lambda(100!) + 200 > 200,$$

czyli liczba 200! ma więcej niż 200 cyfr. Co więcej, dla każdego k większego od 200 liczba $k!$ ma więcej niż k cyfr. Zatem jeżeli istnieją różne od 1 rozwiązania równania $k = \lambda(k!)$, to są one na pewno mniejsze od 200.

Czytelniku Wnikliwy, zechciej uzasadnić, że jeżeli istnieje rozwiązanie większe od 100, to jest ono jedyne, a jeżeli istnieje rozwiązanie mniejsze lub równe 100, to wszystkie pozostałe rozwiązania (poza liczbą 1) będą znajdowały się w jego ścisłym otoczeniu (w tym sensie, że będą tworzyły ciąg $k_0, k_1, \ldots, k_i$ kolejnych liczb naturalnych).

Problem znalezienia wszystkich rozwiązań sprowadziliśmy do zbadania liczb z zakresu od 10 do 199. Jednak przeprowadzenie bezpośrednich obliczeń wciąż byłoby całkiem czasochłonne (ze względu na bardzo duże wartości liczby $k!$ nawet dla niewielkich k). Znajdźmy sposób!

Niech $\mathbb{N}! = \{0!, 1!, 2!, 3!, \ldots\}$ będzie zbiorem silni liczb naturalnych. Funkcja λ jest niemalejąca na zbiorze $\mathbb{N}!$ (podobnie jak na zbiorze $\mathbb{N}$), a po usunięciu z tego zbioru pierwszych sześciu elementów jest na nim rosnąca. Szukanie rozwiązań równania $k = \lambda(k!)$ dla $k \in \{10, 11, \ldots, 199\}$ można efektywnie przeprowadzić metodą *bisekcji* (tj. sprawdzić, czy rozwiązaniem jest element leżący mniej więcej w środku tego zbioru, a jeśli nie, to biorąc pod uwagę wartość funkcji λ dla tego

*doktorant, Zakład Algebry, Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska

elementu, ograniczyć przeszukiwany zbiór do liczb mniejszych lub większych od tego sprawdzonego elementu).

Przedstawmy kilka początkowych kroków zastosowania tego algorytmu. $\lambda(100!) = 158$. Liczba 100! ma 158 cyfr w zapisie dziesiętnym, czyli wszystkie potencjalne rozwiązania będą znajdowały się w zbiorze $\{10, 11, \ldots, 99\}$. $\lambda(50!) = 65$, więc wszystkie potencjalne rozwiązania będą znajdowały się w zbiorze $\{10, 11, \ldots, 49\}$. Kontynuując to rozumowanie, dochodzimy do wniosku, że jedynymi liczbami naturalnymi k, takimi, że liczba $k!$ ma dokładnie k cyfr, są 1, 22, 23 i 24.

$1! = 1$

$22! = 1\,124\,000\,727\,777\,607\,680\,000$

$23! = 25\,852\,016\,738\,884\,976\,640\,000$

$24! = 620\,448\,401\,733\,239\,439\,360\,000$

Liczby 1, 22, 23 i 24 są pierwszymi czterema elementami bardzo ciekawego nieskończonego ciągu liczb naturalnych k, takich, że liczba cyfr liczby $k!$ jest podzielna przez liczbę k (figurującego w OEIS pod numerem A058814).

Czy to już wszystko? Czy odpowiedź na pytanie będące zalążkiem polowania jest kompletna? A co by było, gdybyśmy rozważyli liczby zapisane w innych systemach pozycyjnych?

W standardowym systemie pozycyjnym 2016 oznacza liczbę

$$(2016)_{10} = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 6.$$

Ta sama liczba w systemie pozycyjnym o podstawie 5 wygląda tak:

$$2016 = 3 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1 = (31031)_5.$$

W systemie pozycyjnym o podstawie 1 (*system unarny*) do zapisu liczb stosuje się wyłącznie jeden znak. Kolejne liczby tworzy się przez powtarzanie tego znaku.

Odpowiedź na pytanie, ile jest liczb naturalnych k, takich, że $k!$ ma dokładnie k cyfr, zależy, oczywiście, od podstawy systemu pozycyjnego, w którym rozpatrujemy liczbę k. Niech $\lambda_n(k)$ oznacza liczbę cyfr liczby k w systemie pozycyjnym o podstawie n oraz niech $\Lambda(n)$ oznacza liczbę takich liczb naturalnych k, że liczba $k!$ ma dokładnie k cyfr w zapisie w systemie pozycyjnym o podstawie n. Czyli $\Lambda(1) = 2$ oraz $\Lambda(10) = 4$ (co udowodniliśmy wcześniej). $\Lambda(n)$ jest liczbą rozwiązań równania

$$k = \lambda_n(k!),\ \text{dla } n \geqslant 2.$$

n	Λ_n	Rozwiązania	n	Λ_n	Rozwiązania
1	2	1,2	26	4	1,65,66,67
2	3	1,2,3	27	5	1,67,68,69,70
3	3	1,5,6	28	4	1,70,71,72
4	3	1,7,8	29	4	1,73,74,75
5	3	1,10,11	30	5	1,75,76,77,78
6	3	1,12,13	31	5	1,78,79,80,81
7	3	1,15,16	32	4	1,81,82,83
8	4	1,17,18,19	33	5	1,83,84,85,86
9	3	1,20,21	34	5	1,86,87,88,89
10	4	1,22,23,24	35	4	1,89,90,91
11	4	1,25,26,27	36	5	1,91,92,93,94
12	3	1,28,29	37	5	1,94,95,96,97
13	4	1,30,31,32	38	5	1,97,98,99,100
14	4	1,33,34,35	39	5	1,99,100,101,102
15	4	1,35,36,37	40	5	1,102,103,104,105
16	4	1,38,39,40	41	5	1,105,106,107,108
17	4	1,41,42,43	42	5	1,107,108,109,110
18	5	1,43,44,45,46	43	5	1,110,111,112,113
19	4	1,46,47,48	44	5	1,113,114,115,116
20	4	1,49,50,51	45	4	1,116,117,118
21	5	1,51,52,53,54	46	5	1,118,119,120,121
22	4	1,54,55,56	47	5	1,121,122,123,124
23	4	1,57,58,59	48	5	1,124,125,126,127
24	5	1,59,60,61,62	49	5	1,126,127,128,129
25	4	1,62,63,64	50	5	1,129,130,131,132

Przez Λ_n oznaczmy ciąg wartości funkcji Λ. Jest to ciąg opisujący liczbę liczb k, takich, że liczba $k!$ ma dokładnie k cyfr w zależności od podstawy rozpatrywanego systemu pozycyjnego. I to jest właśnie ten ciąg, który padł ofiarą naszego polowania! Teraz można pokusić się o zbadanie pewnych jego własności, co pozostawiamy jako zadanie dla Czytelnika Niezmęczonego.

(1) Wartości ciągu Λ_n rosną bardzo powoli. Czy istnieje jakieś ograniczenie górne tego ciągu? Jeżeli tak, to jakie?

(2) Dla jakich liczb naturalnych k, liczba $k!$ nie ma k cyfr w żadnym systemie pozycyjnym?

(3)*** Tablica obok sugeruje, że wraz ze wzrostem liczby n (czyli podstawy systemu pozycyjnego), wszystkie nietrywialne (różne od 1) rozwiązania równania

$$k = \lfloor \log_n(k!) \rfloor + 1$$

zbliżają się do liczby $e \cdot n$. Utwierdzająca w tym przekonaniu może być tablica rozwiązań dla początkowych potęg liczby 10:

n	Λ_n	Rozwiązania
1	2	1, 2
10	4	1, 22, 23, 24
100	6	1, 264-268
1000	8	1, 2707-2713
10000	10	1, 27168-27176

Formalnie ten wniosek można zapisać w postaci

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor \log_n \lfloor en \rfloor ! \rfloor + 1}{en} = 1.$$

Czytelniku Poszukujący, spróbuj to udowodnić (np. stosując wzór Stirlinga).