Jeszcze jeden (elementarny) dowód rozbieżności szeregu odwrotności liczb pierwszych

Paulina SZYMAŃSKA, Bogusław SZYMAŃSKI***

Autorka dziękuje tą drogą profesorowi Mariuszowi Skałbie za wyjątkowo ciekawe prowadzenie wykładu.

Wyrazy podziękowania również dla Miriam Lipniackiej, uczennicy Gimnazjum im. Stanisława Staszica.

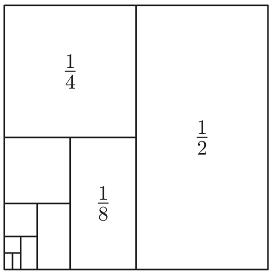
W tym krótkim artykule autorzy chcą zaprezentować zwięzły i piękny w swej prostocie dowód rozbieżności szeregu odwrotności liczb pierwszych. Fakt ten można udowadniać, razem z innymi fundamentalnymi i bardziej wyrafinowanymi twierdzeniami teorii liczb przez cały semestr przedmiotu Teoria Liczb, na Wydziale MIM UW, ale można go również wytłumaczyć w sposób elementarny.

Udowodnimy zatem, korzystając z podstawowych zależności, następujący fakt.

Twierdzenie.

$$S := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \ldots = \infty,$$

gdzie p_i to kolejne liczby pierwsze.



Przypomnimy, że suma *nieskończonej* liczby składników nie musi być nieskończona. Jeśli składniki w nieskończonej sumie są coraz mniejsze, to może ona być skończona. Jako przykład podamy standardowy szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1.$$

Tego faktu dowodzi rysunek na marginesie.

Wytłumaczywszy się z tego, że nieskończenie wiele składników może sumować się do skończonej liczby, pokażemy teraz, że nawet jeśli wyrazy nieskończonej sumy są coraz mniejsze, to wcale niekoniecznie suma ta musi być skończona. Weźmy na warsztat szereg odwrotności liczb naturalnych:

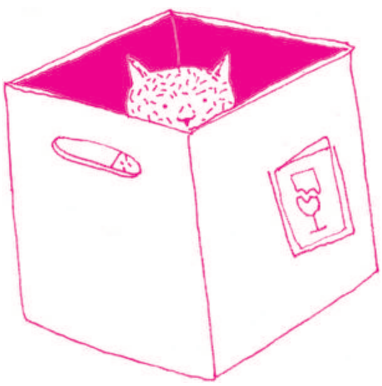
Lemat 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Mikołaj Oresme (∼1320–1382), francuski filozof, biskup Lisieux, doradca Karola V Mądrego

Prosty dowód, pochodzący od Mikołaja Oresme, polega na „paczkowaniu” liczb naturalnych w następujący sposób.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty.$$



Każda n-ta paczka zawiera 2^n kolejnych liczb naturalnych. Suma wyrazów w paczce jest szacowana przez najmniejszy z jej wyrazów, czyli 2^{-n}. W n-tej paczce znajduje się ich 2^{n-1}, a więc n-ta paczka sumuje się do co najmniej $2^{n-1} \cdot 2^{-n}$, dla dowolnego numeru paczki, a paczek jest nieskończenie wiele (suma nieskończenie wielu połówek jest nieskończona).

Lemat 2. *Każdą liczbę naturalną n można dla pewnej naturalnej liczby l zapisać w postaci $p_{k_1} \cdot p_{k_2} \cdot \ldots \cdot p_{k_m} \cdot l^2$, gdzie p_{k_i} to liczby pierwsze.*

Ten fakt jest natychmiastową konsekwencją *Twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze:* każdą dodatnią liczbę naturalną można zapisać w następującej postaci

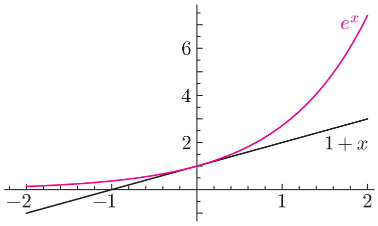
$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m},$$

gdzie p_i są liczbami pierwszymi, a α_i potęgami, w których występują. Rozkład ten, z dokładnością do kolejności, jest jednoznaczny.

Dowód. Żeby udowodnić *Lemat 2*, wystarczy rozdzielić każdą liczbę pierwszą p z powyższego rozkładu, która jest podniesiona do nieparzystej potęgi, $2\alpha + 1$, na dwa czynniki $p^{2\alpha}$ i p. Część „parzystą” grupujemy wraz z tymi liczbami pierwszymi, które podniesione są do parzystej potęgi, w jedną liczbę l^2. Zostają nam liczby pierwsze w potędze 1. □

*doktorantka MISDoMP
**absolwent MIM, tata współautorki

Lemat 3. *Nierówność*
$$1 + x < e^x,$$
jest spełniona dla wszystkich $x \neq 0$.



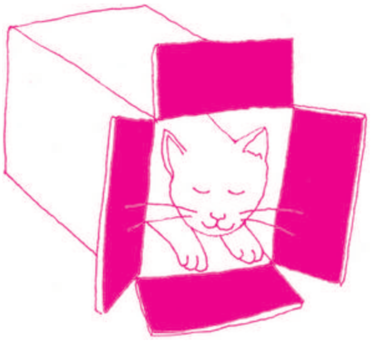
Za dowód niech wystarczy widoczny obok rysunek.

Przyda nam się jeszcze jeden pomocniczy lemat.

Lemat 4.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Mimo że znana jest dokładna suma powyższego szeregu, tutaj wystarczy fakt, że jest ona skończona.

Dowód.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 4} + \ldots$$



Zmniejszając mianownik w każdym wyrazie, dostajemy górne oszacowanie $\frac{1}{k^2}$ przez $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Dzięki temu prawie wszystkie wyrazy się skrócą i otrzymamy nierówność
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \ldots =$$
$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots = 2. \quad \square$$

Dowód twierdzenia. Możemy już udowodnić twierdzenie „główne”. Skorzystajmy najpierw z lematu 3. Skoro
$$\text{każda liczba pierwsza } p_i \text{ spełnia} \left(1 + \frac{1}{p_i}\right) < e^{\frac{1}{p_i}},$$
to można oszacować nieskończony iloczyn
$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\ldots < e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{1}{5}} \ldots = e^{\sum_i \frac{1}{p_i}}.$$
Oznaczmy przez L lewą stronę powyższej nierówności i wymnóżmy nawiasy:
$$L = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{11} + \ldots =$$
$$= 1 + \sum_i \frac{1}{p_i} + \sum_{i\neq j} \frac{1}{p_i p_j} + \sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i} \frac{1}{p_i p_j p_k} + \ldots$$
Przemnóżmy teraz powyższe przez skończoną sumę $\sum \frac{1}{l^2}$ (lemat 4)
$$L \cdot \sum_l \frac{1}{l^2} = 1 + \sum_{i,l} \frac{1}{p_i l^2} + \sum_{i\neq j, l} \frac{1}{p_i p_j l^2} + \ldots,$$
co wynosi dokładnie $\sum_n \frac{1}{n}$ (lemat 2). Mamy zatem ostatecznie
$$\infty = \sum_n \frac{1}{n} = L \cdot \sum_l \frac{1}{l^2} < e^S \cdot 2 \Rightarrow S = \infty. \; \square$$

Dobrym zwyczajem po przeczytaniu artykułu jest samodzielne obliczenie czegoś i zastanowienie się nad podobnym problemem. Proponujemy zatem trzy pytania/zadania, o rosnącym stopniu trudności.

1. Czy suma $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$ jest skończona, a jeśli tak, ile wynosi?
2. Pokazaliśmy w lemacie 4 zbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, bez wskazania wyniku sumowania. Polecamy, by, inspirując się podanym dowodem, obliczyć dokładnie sumę szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.
3. *Liczbami bliźniaczymi* nazwiemy dwie takie liczby pierwsze, których różnica wynosi 2. Są to np. 3 i 5, 5 i 7, …, 71 i 73, …, 1997 i 1999. Do dziś otwarty pozostaje problem, czy liczb tych jest nieskończenie wiele (tzw. *hipoteza liczb pierwszych bliźniaczych*). Oczywiście, nie proponujemy Czytelnikom jako pracy domowej udowodnienia bądź obalenia hipotezy, ale sugerujemy, by zastanowić się, czy suma odwrotności wszystkich liczb pierwszych bliźniaczych jest zbieżna (czyli mniejsza niż ∞), jeśli tak, czy można ją łatwo oszacować.

Rozwiązanie zadania M 1498.
Nie!
Załóżmy przeciwnie, że takie funkcje kwadratowe istnieją. Wówczas liczby $h(0), h(1), \ldots, h(7)$ są pierwiastkami wielomianu czwartego stopnia $f(g(x))$. Ponieważ $h(a) = h(b)$ dla $a \neq b$ tylko wówczas, gdy $\frac{a+b}{2}$ jest wierzchołkiem funkcji $h(x)$, to otrzymujemy $h(0) = h(7)$, $h(1) = h(6)$, $h(2) = h(5)$ i $h(3) = h(4)$. Ponadto $h(0) > h(1) > h(2) > h(3)$ lub $h(0) < h(1) < h(2) < h(3)$.
Liczby $g(h(0))$, $g(h(1))$, $g(h(2))$ i $g(h(3))$ są pierwiastkami funkcji kwadratowej $f(x)$, więc mamy $g(h(0)) = g(h(3))$ i $g(h(1)) = g(h(2))$ oraz $h(0) + h(3) = h(1) + h(2)$. Dla funkcji $h(x) = ax^2 + bx + c$ ostatni warunek wymusza $a = 0$, co daje sprzeczność.