Matematyka jest jedna: Magia liczb

Tomasz KOBOS[*]

[*]doktorant, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

Dotarliśmy do ostatniej części cyklu, w którym prezentujemy wybrane przykłady zaskakujących relacji pomiędzy różnymi, pozornie bardzo odległymi, obszarami matematyki. Nie wypada jednak zakończyć bez poświęcenia należytej uwagi dziedzinie teorii liczb. Jak bowiem matematyka nazywana jest często królową nauk, tak o teorii liczb mówi się często jako o królowej matematyki. A królowa ma, oczywiście, wielu służących.

Mówiąc już całkiem poważnie, proste i eleganckie w sformułowaniu problemy teorii liczb przyciągają uwagę matematyków już od tysięcy lat. Nie trzeba dodawać, iż nierzadko te pozornie proste pytania w rzeczywistości okazują się niezwykle głębokie i wymagające wielu lat wytężonej pracy tęgich umysłów matematycznych. Powstały całkiem nowe dziedziny, których rozwój był inspirowany uzyskaniem postępu w pewnych otwartych problemach teorii liczb. W ramach przykładów możemy wymienić algebraiczną teorię liczb, geometrię algebraiczną czy analityczną teorię liczb. Właśnie ta ostatnia stanowi temat przewodni artykułu.

Termin „analityczna teoria liczb” może brzmieć dosyć groźnie. I rzeczywiście – jest to trudny i zaawansowany dział matematyki, który po dziś dzień jest ciągle intensywnie rozwijany. Z góry jednak uspokajamy, że cały artykuł oparty jest na elementarnych przykładach i nie wymaga żadnej specjalistycznej wiedzy. Potrzebne będą jedynie podstawowe informacje dotyczące granic ciągów i zbieżności szeregów. W ostatnim z zadań wykorzystamy również podstawowe własności liczb zespolonych. Cała ta wiedza mieści się w programie I roku studiów i korzystając z materiałów pomocniczych, można ją w razie czego bardzo szybko uzupełnić. Okazuje się, że nawet tak podstawowe narzędzia analizy otwierają całkiem nowe możliwości w zakresie rozwiązywania problemów teorii liczb.

Metody analityczne służą często do badania teorioliczbowych własności wielomianów o współczynnikach całkowitych. Mogą być pomocne w scharakteryzowaniu wielomianów o pewnych naturalnych własnościach. Tego typu charakteryzacja stanowi treść pierwszego z zadań, pochodzącego z II etapu polskiej Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 1. *Trójmian kwadratowy $P(x)$ o współczynnikach całkowitych spełnia następujący warunek: dla dowolnej liczby całkowitej x liczba $P(x)$ jest kwadratem liczby całkowitej. Dowieść, że wielomian $P(x)$ jest kwadratem pewnego wielomianu.*

Rozwiązanie. Niech

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ oraz $a \neq 0$. Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ niech x_n będzie taką liczbą naturalną, że $P(n) = x_n^2$. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ma dwie istotne własności. Po pierwsze, jest to ciąg liczb całkowitych. Po drugie, na podstawie definicji jesteśmy w stanie określić jego tempo wzrostu. Cała sztuczka polega teraz na tym, aby z ciągiem $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ związać inny ciąg liczb całkowitych, który okaże się zbieżny. Wówczas otrzymamy naprawdę potężną dawkę informacji – zbieżny ciąg liczb całkowitych musi być przecież od pewnego miejsca stały! Jak więc znaleźć taki ciąg? Możemy myśleć w ten sposób: skoro kwadrat liczby x_n „zachowuje się” kwadratowo (jest wartością wielomianu kwadratowego), to ciąg x_n powinien „zachowywać się” liniowo.
To nasuwa pomysł zbadania różnicy $x_{n+1} - x_n$. Jest to rzeczywiście dobry kierunek, gdyż możemy zauważyć, że

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{x_{n+1} + x_n} =$$

$$= \frac{(a(n+1)^2 + b(n+1) + c) - (an^2 + bn + c)}{\sqrt{a(n+1)^2 + b(n+1) + c} + \sqrt{an^2 + bn + c}} =$$

$$= \frac{2an + a + b}{\sqrt{an^2 + (2a+b)n + (a+b+c)} + \sqrt{an^2 + bn + c}} =$$

$$= \frac{2a + \frac{a+b}{n}}{\sqrt{a + \frac{2a+b}{n} + \frac{a+b+c}{n^2}} + \sqrt{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}}.$$

Przechodząc z n do nieskończoności, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = \frac{2a}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \sqrt{a}.$$

Wykazaliśmy w ten sposób, iż ciąg liczb całkowitych $(x_{n+1} - x_n)_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny. Musi być to zatem ciąg od pewnego miejsca stały i jego granica jest, oczywiście, liczbą całkowitą. Innymi słowy, istnieją takie liczby naturalne k, N, że $a = k^2$ oraz $x_{n+1} = x_n + k$ dla $n \geqslant N$. W szczególności

$$x_n = x_{n-1} + k = x_{n-2} + 2k = \ldots = x_N + (n - N)k,$$

dla dowolnego $n \geqslant N$. Tym samym dla dowolnego $n \geqslant N$

spełniona jest równość

$$P(n) = x_n^2 = (x_N + (n - N)k)^2.$$

Ponieważ wartości wielomianów $P(x)$ oraz $(x_N + (x - N)k)^2$ pokrywają się dla nieskończenie wielu argumentów, wielomiany te są równe. Wykazaliśmy w ten sposób, że $P(x)$ jest kwadratem pewnego wielomianu i dowód jest zakończony.

Kolejny przykład jest zaskakującym zastosowaniem słynnego faktu analizy matematycznej: *szereg harmoniczny*, czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ kolejnych odwrotności liczb naturalnych, jest rozbieżny.

Zadanie 2. *Dane są liczby całkowite a, b większe od 1. Udowodnić, że istnieje pewna wielokrotność liczby a, która zapisana w systemie pozycyjnym o podstawie b zawiera każdą z cyfr $0, 1, 2, \ldots, b - 1$.*

Rozwiązanie. Rozwiązanie będzie przebiegać w sposób niekonstruktywny. Zamiast wskazywać konkretną wielokrotność liczby a, która ma żądaną własność, założymy, że teza zadania nie jest prawdziwa i dojdziemy do sprzeczności. Ponieważ szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ odwrotności kolejnych liczb naturalnych jest rozbieżny, rozbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na}$ odwrotności wielokrotności liczby a. Niech S oznacza zbiór liczb naturalnych n, które w zapisie pozycyjnym o podstawie b nie zawierają choćby jednej z b możliwych cyfr. Jeżeli teza zadania nie jest prawdziwa, to zbiór S zawiera wszystkie wielokrotności liczby a, a więc w szczególności szereg $\sum_{x \in S} \frac{1}{x}$ jest rozbieżny. Udowodnimy, że ten szereg jest zbieżny, uzyskując w ten sposób sprzeczność, która w efekcie zakończy rozwiązanie zadania.

Ustalmy dowolną cyfrę ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, b - 1\}$. Łatwo zauważyć, że wystarczy udowodnić, iż szereg odwrotności tych liczb, które nie zawierają w swoim zapisie właśnie tej ustalonej cyfry, jest zbieżny. Zauważmy dalej, że liczb o n cyfrach w zapisie o podstawie b, które nie zawierają pewnej ustalonej cyfry, jest co najwyżej $(b - 1)^n$ – bowiem każdą z cyfr możemy wybrać na co najwyżej $b - 1$ sposobów. Co więcej, liczba o n cyfrach jest nie mniejsza niż b^{n-1}. Jej odwrotność nie przekracza więc $\frac{1}{b^{n-1}}$. Ponieważ liczb n-cyfrowych niezawierających ustalonej cyfry jest co najwyżej $(b - 1)^n$, ich suma odwrotności jest zatem nie większa niż $\frac{(b-1)^n}{b^{n-1}}$. Sumując po wszystkich n, otrzymujemy, iż szereg odwrotności liczb naturalnych, które nie zawierają pewnej ustalonej cyfry, nie przekracza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b-1)^n}{b^{n-1}} = b \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b-1}{b}\right)^n = (b - 1)b < \infty,$$

gdzie ostatnia z równości wynika bezpośrednio ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego. Powyższy szereg jest więc zbieżny i dowód jest zakończony.

Kolejne zadanie dotyczy klasycznego twierdzenia Schura o wielomianach o współczynnikach całkowitych.

Zadanie 3 (Twierdzenie Schura)**.** *Dany jest niestały wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych. Udowodnić, że dla nieskończenie wielu liczb pierwszych p istnieje taka liczba naturalna n, że p dzieli $P(n)$.*

Rozwiązanie. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że istnieje jedynie skończenie wiele liczb pierwszych p o takiej własności. Niech będą to liczby $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Wówczas dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $P(n)$ pojawiają się tylko pewne z liczb p_i dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Innymi słowy, $P(n) = cp_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi oraz $c \in \{1, -1\}$.

Ustalmy liczbę rzeczywistą $r > 0$ i zauważmy, że

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \geqslant 0} \frac{1}{p_1^{r\alpha_1} p_2^{r\alpha_2} \ldots p_k^{r\alpha_k}} = \prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_i^r} + \frac{1}{p_i^{2r}} + \ldots\right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^r}{p_i^r - 1},$$

przy czym sumowanie odbywa się po całkowitych α_i. Pierwsza z równości wynika z bezpośredniego wymnożenia wszystkich nawiasów i z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze – liczba $p_1^{r\alpha_1} p_2^{r\alpha_2} \ldots p_k^{r\alpha_k}$ pojawi się tylko jako efekt wymnożenia α_i-go składnika z i-go czynnika iloczynu. Druga z równości to, oczywiście, bezpośrednie zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego. Widzimy więc w szczególności, że szereg

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \geqslant 0} \frac{1}{p_1^{r\alpha_1} p_2^{r\alpha_2} \ldots p_k^{r\alpha_k}}$$

jest zbieżny dla dowolnej liczby rzeczywistej $r > 0$.

Niech zatem $r = \frac{1}{2m}$, gdzie $m \geqslant 1$ jest stopniem wielomianu P. Dla odpowiednio dużych n prawdziwa jest wówczas nierówność

$$|P(n)|^r = \sqrt[2m]{|P(n)|} \leqslant n,$$

gdyż po podniesieniu obu stron nierówności do potęgi $2m$ sprowadza się ona do $|P(n)| \leqslant n^{2m}$, a wielomian x^{2m} jest wielomianem wyższego stopnia niż $P(x)$. W szczególności

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|P(n)|^r} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Z drugiej jednak strony każda liczba $|P(n)|^r$ jest postaci $p_1^{r\alpha_1} p_2^{r\alpha_2} \ldots p_k^{r\alpha_k}$. Co więcej, dowolna liczba postaci $p_1^{r\alpha_1} p_2^{r\alpha_2} \ldots p_k^{r\alpha_k}$ jest równa co najwyżej $2m$ liczbom $|P(n)|$ – wielomian P nie jest stały, a więc każdą wartość przyjmuje co najwyżej m razy, tak samo jak wielomian $-P$. A zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|P(n)|^r} \leqslant 2m \left(\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \geqslant 0} \frac{1}{p_1^{r\alpha_1} p_2^{r\alpha_2} \ldots p_k^{r\alpha_k}} \right) < \infty.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Istnieje wiele dowodów twierdzenia Schura. Zachęcamy gorąco Czytelnika do próby odnalezienia innego – dowód zaprezentowany powyżej jest bardzo niecodzienny, ale da się przeprowadzić bardziej nasuwające się rozumowanie, które prowadzi do konkluzji twierdzenia.

Powyższy dowód ma jednak istotną zaletę: w rzeczywistości wynika z niego znacznie więcej. Zauważmy bowiem, że dla dowolnego ciągu liczb całkowitych dodatnich $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ można zapytać o to, czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p, takich, że $p \mid a_n$ dla pewnego $n \geqslant 1$. Nie jest tak, oczywiście, dla każdego ciągu: wystarczy wziąć ciąg stały albo ciąg $a_n = 2^n$. Jeżeli jednak założymy dodatkowo, że istnieje taka liczba naturalna N, że każda liczba naturalna jest wartością ciągu a_n dla co najwyżej N indeksów n, oraz że wyrazy ciągu rosną w tempie nie szybszym niż wielomianowym – czyli, że istnieje taki wielomian $P(x)$, że $a_n \leqslant P(n)$ dla odpowiednio dużych n, to powyższe rozumowanie gwarantuje nieskończony zbiór liczb pierwszych, z których każda dzieli pewien wyraz ciągu. Przedstawiony argument daje więc pozytywną odpowiedź w bardzo szerokiej klasie ciągów.

Ostatnie z zadań należy do podobnej kategorii co zadanie pierwsze. Dotyczy ono charakteryzacji unormowanych wielomianów o współczynnikach całkowitych, które osiągają każdą z potęg liczby 2 dla argumentów całkowitych. Główny pomysł rozwiązania również jest zbliżony, lecz zrealizowanie go w szczegółach wymaga większego zaangażowania.

Zadanie 4. *Dany jest unormowany wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, który spełnia następujący warunek: dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n istnieje taka liczba całkowita dodatnia x, że $P(x) = 2^n$. Udowodnić, że wielomian P jest wielomianem liniowym.*

Rozwiązanie. Oznaczmy przez m stopień wielomianu P. Naszym celem jest wykazanie równości $m = 1$. Z treści zadania wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ istnieje taka liczba całkowita x_n, że $P(x_n) = 2^n$. Podobnie jak w zadaniu pierwszym, możemy próbować wykorzystać ten warunek, aby związać z ciągiem $(x_n)_{n\geqslant 1}$ inny ciąg liczb całkowitych, który okaże się zbieżny, a więc od pewnego miejsca stały. Przeprowadzimy najpierw czysto heurystyczne rozumowanie, które pomoże nam znaleźć kandydata na tego typu ciąg. Ponieważ wielomian P jest unormowany i stopnia m, możemy myśleć, że dla dużych wartości x wartość $P(x)$ „zachowuje się” jak x^m. Skoro tak, to aby zachodziła równość $P(x_n) = 2^n$, wyraz x_n powinien „zachowywać się” jak $2^{\frac{n}{m}}$. Zauważmy jednak, że $2^{\frac{n+m}{m}} - 2 \cdot 2^{\frac{n}{m}} = 0$, co sugeruje, że dobrym kandydatem może być ciąg $(x_{n+m} - 2x_n)_{n\geqslant 1}$. Okazuje się, że tak jest w istocie – udowodnimy, że jest to ciąg zbieżny.

W pierwszej kolejności dowiedziemy nieco słabszej własności: $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+m}}{x_n} = 2$. Zauważmy najpierw, że ciąg x_n dąży, oczywiście, do nieskończoności. Ponieważ współczynnik w P przy x^m jest równy 1, to dostajemy $\lim_{n\to\infty} \frac{P(x_n)}{x_n^m} = 1$. Tym samym

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+m}^m}{x_n^m} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+m}^m}{P(x_{n+m})} \cdot \frac{P(x_n)}{x_n^m} \cdot \frac{P(x_{n+m})}{P(x_n)} = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{P(x_{n+m})}{P(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+m}}{2^n} = 2^m,$$

a stąd, oczywiście, mamy $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+m}}{x_n} = 2$. Ciąg $\frac{x_{n+m}}{x_n}$ niekoniecznie jest ciągiem liczb całkowitych, a więc jego zbieżność nie daje jeszcze nam bezpośrednio istotnych korzyści. Jest to jednak pomocny krok pośredni.

Zapiszmy bowiem wielomian $P(x)$ w postaci
$$P(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
dla pewnych liczb całkowitych $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$. Z równości $P(x_{n+m}) = 2^{n+m} = 2^m P(x_n)$ otrzymujemy
$$x_{n+m}^m - 2^m x_n^m = -\sum_{i=0}^{m-1} a_i(x_{n+m}^i - 2^m x_n^i).$$
Ze wzoru na różnicę m-tych potęg mamy ponadto
$$x_{n+m}^m - 2^m x_n^m = (x_{n+m} - 2x_n)\Big(\sum_{i=0}^{m-1} 2^i x_n^i x_{n+m}^{m-i-1}\Big),$$
co w połączeniu daje nam zależność
$$x_{n+m} - 2x_n = -\frac{\sum_{i=0}^{m-1} a_i(x_{n+m}^i - 2^m x_n^i)}{\sum_{i=0}^{m-1} 2^i x_n^i x_{n+m}^{m-i-1}} = \\ = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} a_i\Big(\big(\frac{x_{n+m}}{2x_n}\big)^i \frac{1}{(2x_n)^{m-i-1}} - 2\Big)}{\sum_{i=0}^{m-1} \big(\frac{x_{n+m}}{2x_n}\big)^{m-i-1}}.$$
Przechodząc z n do nieskończoności w powyższej równości i korzystając z wcześniej udowodnionego faktu $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+m}}{2x_n} = 1$, otrzymujemy zatem zbieżność ciągu $x_{n+m} - 2x_n$. Jest to ciąg liczb całkowitych, a więc istnieje liczba naturalna N oraz liczba całkowita A, dla których $x_{n+m} - 2x_n = A$, gdy $n \geqslant N$.

Wykazaliśmy w ten sposób, że dla odpowiednio dużych n prawdziwa jest równość $P(2x_n + A) = 2^m P(x_n)$. To jednak oznacza, iż wielomian $P(2x + A) - 2^m P(x)$ ma nieskończenie wiele pierwiastków, a więc jest wielomianem zerowym. Czyli dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest równość $P(2x + A) = 2^m P(x)$.

Wychodząc od teorioliczbowego warunku danego w treści zadania, udało nam się zatem dotrzeć do czysto algebraicznej zależności, którą spełnia wielomian $P(x)$. Aby doprowadzić rozwiązanie do końca, posłużymy się liczbami zespolonymi. Jak wiadomo, każdy wielomian ma tyle pierwiastków zespolonych, ile wynosi jego stopień. Niech z_0 będzie zatem dowolnym zespolonym pierwiastkiem wielomianu P. Wówczas
$$0 = 2^m P(z_0) = P(2z_0 + A),$$
skąd wynika, że $2z_0 + A$ jest również pierwiastkiem wielomianu P. Kontynuując w ten sposób, widzimy, że pierwiastkiem wielomianu P są również liczby $4z_0 + 3A, 8z_0 + 7A, 16z_0 + 15A, \ldots$. Wielomian P nie jest jednak wielomianem zerowym, a więc liczby w tym ciągu muszą od pewnego miejsca zacząć się powtarzać. To zaś oznacza, że dla pewnych liczb naturalnych $k > l$ mamy
$$2^k z_0 + (2^k - 1)A = 2^l z_0 + (2^l - 1)A,$$
co z kolei można przekształcić do postaci
$$(2^k - 2^l)z_0 = -(2^k - 2^l)A,$$
a stąd, oczywiście, $z_0 = -A$.

Dowiedliśmy zatem, iż każdy pierwiastek wielomianu $P(x)$ jest równy $-A$. Skoro wielomian $P(x)$ jest unormowany, to w takim razie $P(x) = (x + A)^m$. W tym momencie teza zadania staje się ewidentna:

$$(x_1 + A)^m = P(x_1) = 2.$$

Liczba 2 jest m-tą potęga liczby całkowitej tylko dla $m = 1$. Wielomian $P(x)$ jest więc wielomianem liniowym i rozwiązanie jest zakończone.

W ten sposób dotarliśmy do końca cyklu. Żywimy nadzieję, że ukazał on korzyści płynące z zachowania otwartości umysłu na niecodzienne pomysły. Podobnie jak odwagi do podążania niekoniecznie najbardziej narzucającą się drogą. Któż bowiem wie, co ciekawego może nas na niej spotkać?

Metody, które Czytelnik miał okazję spotkać w powyższych przykładach, może wykorzystać w dwóch zadaniach do samodzielnego rozwiązania.

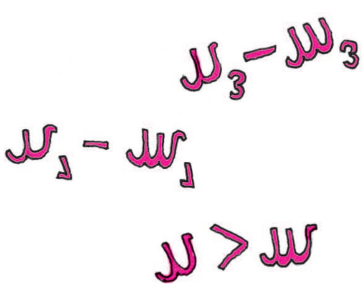
Zadanie 5. *Liczby całkowite a i b spełniają następujący warunek: dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba $a \cdot 2^n + b$ jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnić, że $a = 0$.*

Podpowiedź. Niech x_n będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że $a \cdot 2^n + b = x_n^2$. Rozważ ciąg $(2x_n - x_{n+2})_{n\geqslant 1}$.

Zadanie 6. *Dany jest rosnący ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$ liczb całkowitych, który spełnia warunek $a_n \leqslant 1000n$. Wykazać, że w ciągu istnieje nieskończenie wiele wyrazów, które w zapisie dziesiętnym mają co najmniej 2015 kolejnych cyfr równych 1.*

Podpowiedź. Niech S będzie zbiorem liczb, które w zapisie dziesiętnym nie mają ciągu 2015 kolejnych cyfr równych 1. Udowodnij, że szereg $\sum_{x\in S} \frac{1}{x}$ jest zbieżny. Oszacuj w tym celu od góry liczbę liczb n cyfrowych w zbiorze S.

Zadania



Redaguje Urszula PASTWA

M 1486. Dane są takie liczby całkowite dodatnie $n > m$, że liczby $n^7 - m^7$ oraz $n^3 - m^3$ są względnie pierwsze. Wykaż, że liczby $n^2 - m^2$ i $n^3 - m^3$ są również względnie pierwsze.
Rozwiązanie na str. 2

M 1487. W trójkąt ABC wpisany jest okrąg o promieniu r. Proste styczne do okręgu i równoległe do boków trójkąta odcinają od niego trzy trójkąty. Wykaż, że suma promieni okręgów wpisanych w te trzy trójkąty jest równa r.
Rozwiązanie na str. 5

M 1488. Rozstrzygnąć, czy istnieją liczby naturalne n_1, n_2, n_3, n_4, wszystkie większe od 2016, spełniające równanie

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = n_1n_2n_3 + n_1n_2n_4 + n_1n_3n_4 + n_2n_3n_4.$$

Rozwiązanie na str. 15

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 899. Bezpośredni pomiar energii kinetycznej poruszającego się swobodnie elektronu dał wynik $E = (1000 \pm 0{,}1)$ eV – tzn. pomiar wykonano z dokładnością do $\Delta E = 0{,}1$ eV. Wyznacz stosunek dokładności określenia położenia (współrzędnej x w kierunku ruchu) elektronu do długości jego fali de Broglie'a bezpośrednio po tym pomiarze.
Rozwiązanie na str. 1

F 900. Do wykonania doświadczenia Younga z molekułami – tj. obserwacji prążków interferencyjnych po przejściu wiązki przez układ równoległych, równoodległych szczelin – potrzebna jest odpowiednio przygotowana wiązka molekuł. Powinna to być wiązka identycznych molekuł poruszających się równolegle w kierunku układu szczelin z jednakowymi prędkościami. Jak duży jest dopuszczalny rozrzut Δv prędkości molekuł w wiązce, jeśli chcemy zaobserwować wyraźne prążki do rzędu n?

Rozrzut Δv prędkości v w wiązce o średniej prędkości v_0 określają nierówności $v_0 - \Delta v < v < v_0 + \Delta v$.
Rozwiązanie na str. 15