Dwa zadania (*Delta* 12/1990)

Jarosław WRÓBLEWSKI

10
219
4796
105030
2300104
50371117
1103102046
24157378203
529034393290
11585586272312
253718493496142
5556306986017175
121680319386464850
2664737596978110299
58356408797678883616
1277975907130111287030
27987027523701766535844
612901781044839990619277
13422239746246942029463326
293940277834746405249823203
6437143767881726489806973190
140970200455734695276637468392
3087176259086334835548776106122
67607602343297851162601939391695
1480572377802050246594187936024890
32423788005073752816976163732130379
710064596881545822871428836670676836
15550056386553447472796412677073638630
340538388601466711930899827265490092384
7457618881148419333592105943068579865437

Zadanie 1: Znaleźć regułę, według której skonstruowany jest ciąg o 30 początkowych wyrazach podanych obok.

Rozwiązanie 1:
$A(1) = 10$, $A(2) = 219$, $A(n+2) = A(n+1)^2/A(n)$ zaokrąglone do najbliższej liczby całkowitej. To znaczy: zaczynamy od 10 i 219, za każdym razem wybieramy liczbę, która z najlepszym przybliżeniem tworzy ciąg geometryczny z poprzednimi dwiema.

Rozwiązanie 2:
Zaczynamy od 10, 219, 4796, 105030 i kontynuujemy według wzoru

$$A(n+4) = -11A(n) + 18A(n+1) - 3A(n+2) + 22A(n+3)$$

(rekursja liniowa 4. rzędu).

Zadanie 2: Skoro dany ciąg może być zdefiniowany na dwa różne sposoby, to jak wykazać, że te dwie definicje są równoważne?

Rozwiązanie:
No cóż, można obliczyć pierwszych 1000 wyrazów, używając obu definicji, i przekonać się, że wszystko się zgadza. Wydrukowanie tysiąca początkowych wyrazów zajęłoby pokaźnych rozmiarów książkę. Czyż trzeba bardziej przekonującego argumentu? Tak, trzeba. Tylko że takiego argumentu po prostu nie ma. Obie, bądź co bądź, bardzo proste definicje określają dwa różne ciągi!!! Jedynie „skromny” początek obu ciągów, składający się z 1402 wyrazów, jest taki sam. Ale według pierwszej definicji 1403. wyraz jest równy

19437084713149433080594454526570109404874503118640668427325967909392790681911680214396710953048006835197566451431428017663451154057890591726021924260243576045076439193105281045724311484734227033879021203146963166826037352676921116856223392433562422600560593362179127990597860794819978066319139554931349410953587702639183130258483735817260549281490113420477745281542482874337824632375764168570263092547887559037427771394775944563850420203813155386043799417895903226663688148927803850468114776559858255378944318941439947120439422683940438235434502075138861907994097075316326795170528691043359407234889602407704704384704343295353438663304291326571792018948107764954699369987162292707649049171987413653402427826009090031681956295538315897703654726877054837966614742389202717260703905051790672088594908177654946362497936433141972953085001548147067787320342706223186219105220301420402834359924468773958522524683652352196573272117424754292168596128980091467993978342075889953939307335116910213849202567245545948573368555507149632213550490791187650018753748355204341389275162018769584965649588057652023644763135556158268845166312245991515325905044465412368936257138326200424390774190067778614848603860489759787624331007424392967007828818894863807140701488874840984106942182336872630427554654937939279814971995210269203862008481535682876743103433463714986892839687846941843547666791118707025652686814913570792155697812196943093286292437578292815375442223056230849622702993006454201825028790461757142619193977715097002985701578910047119173730292903863031097019590968413289646508898916828714469785686929223450601826701036280566004039774329168938290690987325456361747944463624754832055906746961193154885436678675146767864407581268507543004529643682651330825632025809081716500742037392907359413879462420055242763164133569123948164928515938423909859385200482683845928498985136220960901835870182 1,

podczas gdy druga definicja daje 1403. wyraz o 1 większy.

Rozwiązanie zadania M 1422.
Możemy założyć (dla $k > 1$), że k-ta osoba w kolejce ma na bilecie numer k. Niech B_n oznacza zdarzenie w doświadczeniu z n osobami, w którym n-ta osoba usiadła na swoim miejscu. Oczywiście, $\mathbb{P}(B_2) = 1/2$. Udowodnimy teraz indukcyjnie, że $\mathbb{P}(B_n) = 1/2$. Niech $n \geqslant 3$ i $\mathbb{P}(B_k) = 1/2$ dla $k \leqslant n-1$. Rozpatrzmy doświadczenie z n osobami i niech A_k oznacza zdarzenie, że pierwsza osoba wylosowała miejsce k-te. Oczywiście, $\mathbb{P}(A_k) = 1/n$ dla $1 \leqslant k \leqslant n$. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite mamy

$$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_n|A_k) \cdot \mathbb{P}(A_k).$$

Zauważmy, że $\mathbb{P}(B_n|A_n) = 0$, $\mathbb{P}(B_n|A_1) = 1$ oraz dla $2 \leqslant k \leqslant n-1$ zachodzi $\mathbb{P}(B_n|A_k) = \mathbb{P}(B_{n-k+1}) = 1/2$. Otrzymujemy więc, że

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{n}\left(1 + (n-2)\cdot\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2}.$$