mała delta

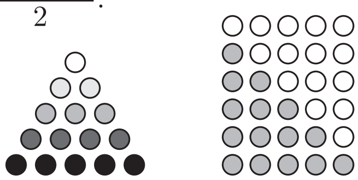
Liczby geometryczne

Od najmłodszych lat każdy z nas poznaje świat liczb, zliczając zabawki, jabłka czy książki. Nikogo nie dziwi zatem przedstawienie liczby 5 jako pięciu kulek. Tylko czy takie przedstawienie może pomóc w odkrywaniu świata komuś, kto ukończył już przedszkole? Okazuje się, że tak – wystarczy uważne spojrzenie i wyobraźnia, a może nam przynieść nieoczekiwane spostrzeżenia.

Spróbujemy poukładać z kulek różne figury, a zaczniemy od trójkątów. Trójkąt o boku n powstaje poprzez ułożenie jednej kulki w wierzchołku, dwóch kulek poniżej, trzech kulek w kolejnym rzędzie i tak dalej, aż do podstawy złożonej z n kulek (jak na rysunku dla $n = 5$). W takim razie taki trójkąt jest złożony z $T_n = 1 + 2 + \ldots + n$ kulek (liczbę T_n będziemy nazywać liczbą trójkątną). Jednocześnie, odrobinę przekładając kulki, można z dwóch takich trójkątów ułożyć prostokąt o wymiarach $n \times (n + 1)$. A co to oznacza? Oczywiście:

$$2 \cdot T_n = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = n(n + 1),$$

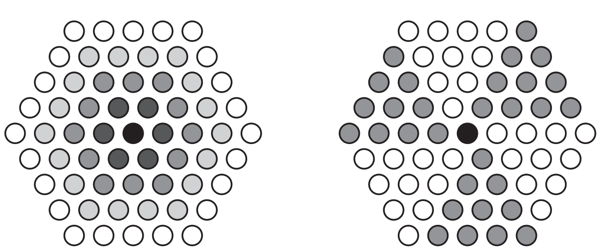
czyli $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.



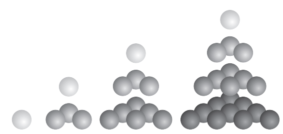
Zachęceni tym małym sukcesem spróbujmy pójść dalej i ułożyć z kulek sześciokąt: wkładamy jedną kulkę w środek, otaczamy ją sześcioma kulkami, te otaczamy dwunastoma kolejnymi i tak dalej.

Do zbudowania sześciokąta o boku n zużywamy więc $S_n = 1 + 6 + 12 + \ldots + 6(n - 1)$ kulek (taką liczbę będziemy nazywać liczbą sześciokątną). Czy można ją łatwo obliczyć? Oczywiście – przecież sześciokąt składa się z kulki w środku i sześciu trójkątów, o boku o jeden mniejszym niż bok sześciokąta. W takim razie

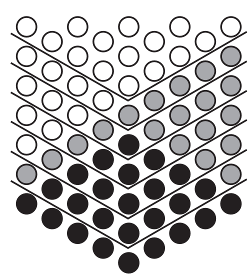
$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + 6 \cdot T_n = 1 + 3n(n + 1) = \\ &= 1 + 3n + 3n^2. \end{aligned}$$



Co będziemy budować dalej? Oczywiście można zabawiać się różnymi wielokątami, ale można również zacząć przygodę w trzecim wymiarze – zbudujemy piramidę o podstawie trójkąta.



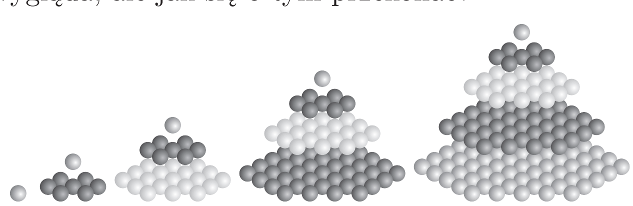
Do zbudowania n poziomów takiego czworościanu potrzebujemy $U_n = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n$. Czyli ile? 1, 4, 10, 20 – co to za liczby? Czy można wyrazić je w inny sposób? Znów pomoże nam układanka, tym razem przestrzenna. Z trzech takich piramid możemy ułożyć graniastosłup o wysokości $n + 2$ i o podstawie trójkąta o boku n:

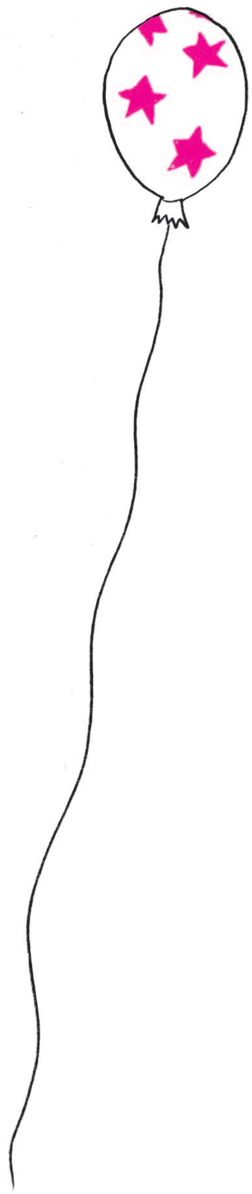


W takim razie otrzymujemy kolejną własność:

$$3 \cdot U_n = (n + 2) \cdot T_n = \frac{1}{2} n(n + 1)(n + 2).$$

Spróbujmy jeszcze ułożyć piramidy z sześciokątów. Jedna kulka na szczycie, siedem kulek niżej, i tak dalej aż do podstawy z S_n kulek. Zużyliśmy w ten sposób $W_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ kulek: dla kolejnych n są to liczby 1, 8, 27, 64, … Chwileczkę! Czyżby to były sześciany liczb naturalnych? Na to wygląda, ale jak się o tym przekonać?

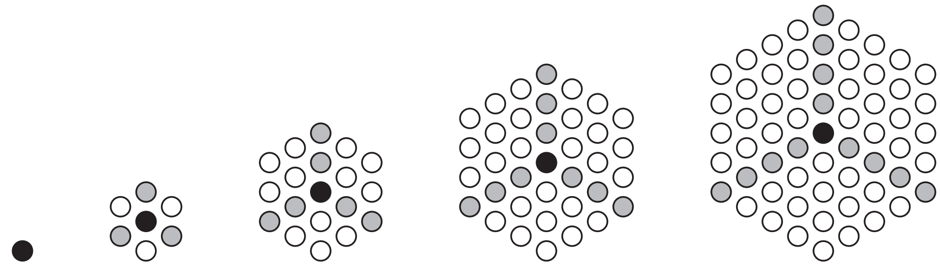




Wystarczy odpowiednio „powyginać” dokładane sześciokąty:

$$S_{n+1} = 1 + 3n + 3n^2$$

kulek można ułożyć w trzy ściany sześcianu o boku $n + 1$. Potem już nietrudno złożyć z kolejnych takich kawałków sześcian:



W ten sposób udało nam się pokazać kolejną zależność między naszymi liczbami:

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = n^3.$$

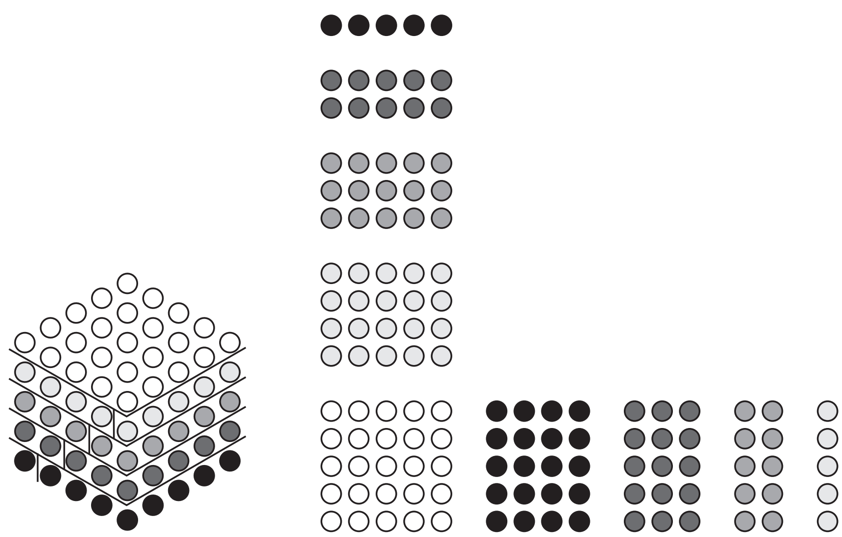
Na zakończenie spróbujemy pójść jeszcze dalej – ułożyć piramidę z sześcianów (choć można traktować ją jako obiekt czterowymiarowy, my będziemy myśleć o niej jako o sześcianach ułożonych jeden na drugim). Ile zużyjemy kulek? Tym razem będzie to

$$Z_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

I znów możemy przyjrzeć się uważnie tak otrzymanym liczbom:

$$1, 9, 36, 100, \ldots$$

Są to kwadraty… liczb trójkątnych! A dlaczego? Wystarczy każdy z sześcianów odpowiednio pociąć i ułożyć z otrzymanych kawałków pasek w kształcie litery L – kolejne takie paski złożą się w kwadrat o boku $1 + 2 + \ldots + n = T_n$:



A może da się odgadnąć te wzory bezpośrednio z takiej tabelki?

n	T_n	S_n	U_n	W_n	Z_n
1	1	1	1	1	1
2	3	7	4	8	9
3	6	19	10	27	36
4	10	37	20	64	100
5	15	61	35	125	225
6	21	91	56	216	441

I tak otrzymaliśmy kolejny wzór

$$Z_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = T_n^2.$$

Czytelnik Wytrwały z pewnością odnajdzie jeszcze inne zależności między liczbami geometrycznymi (czyli takimi, które odpowiadają liczbie kulek w pewnych figurach i bryłach). Każda z nich pomaga zrozumieć pewną zależność, której dowodzenie standardowymi metodami może okazać się wcale niełatwe…

Małą Deltę przygotowała Urszula PASTWA
doktorantka, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska