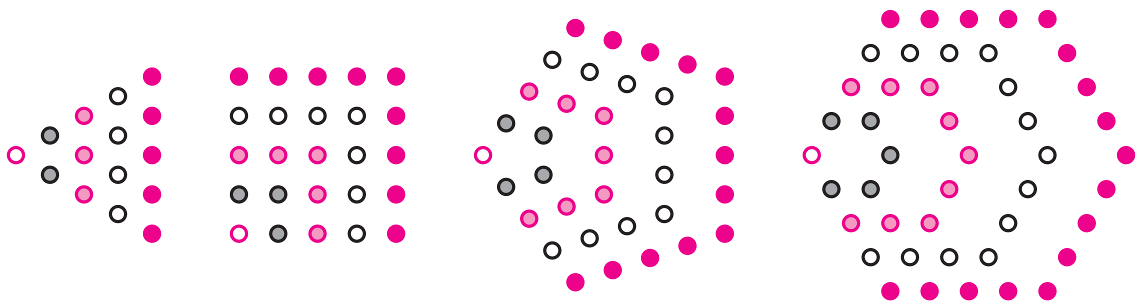
mała delta

Geometryczne liczby

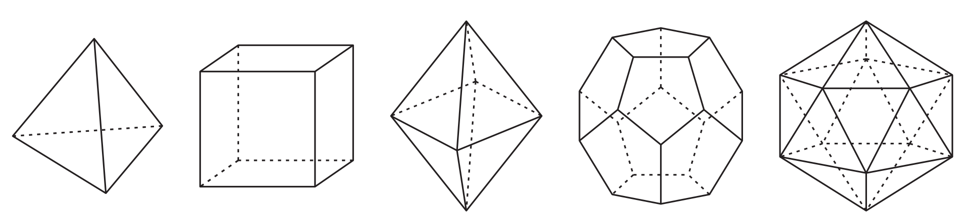
Trzy kółeczka łatwo ułożyć w trójkąt foremny (czyli równoboczny), cztery w czworokąt foremny (czyli kwadrat), pięć w pięciokąt foremny itd. Można więc 3 uważać za liczbę trójkątną, cztery za czworokątną, pięć za pięciokątną itd. Rysunki poniżej pokazują, jak można, rysując kropki, określić inne *liczby wielokątne*.



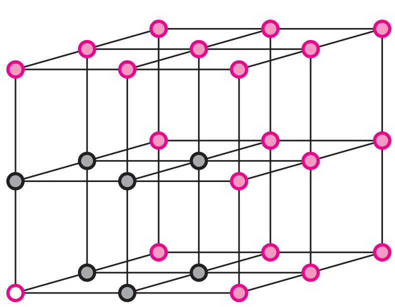
Jeśli umówimy się, że 1 jest liczbą n-kątną dla dowolnego n, to liczbami trójkątnymi będą $1, 3, 6, 10, \ldots$, czworokątnymi $1, 4, 9, 16, \ldots$, pięciokątnymi $1, 5, 12, 22, \ldots$, sześciokątnymi $1, 6, 15, 28, \ldots$ Można znajdować i badać wynikające z obserwacji tych liczb prawidłowości: np. $(n+1)$*-szą liczbę trójkątną uzyskujemy, dodając do poprzedniej* $n+1$. Albo: *suma* n *kolejnych liczb nieparzystych to* n^2. W dawnych wiekach tego rodzaju spostrzeżenia dały początek pasjonującej do dziś wielu mistyków numerologii. Można też – bardziej matematycznie – znaleźć ogólny wzór na n-tą liczbę k-kątną. Może on wyglądać, na przykład,

$$\text{tak:} \quad n + (k-2)\cdot\frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{lub tak:} \quad n\cdot\frac{(k-2)(n-1)+2}{2}.$$

Oczywiście, w podobny sposób można układać z kuleczek wielościany. Gdybyśmy jednak chcieli trzymać się słowa *foremny*, które wystąpiło w definicji liczb wielokątnych, otrzymalibyśmy tylko pięć takich ciągów, bo istnieje tylko pięć wielościanów foremnych:



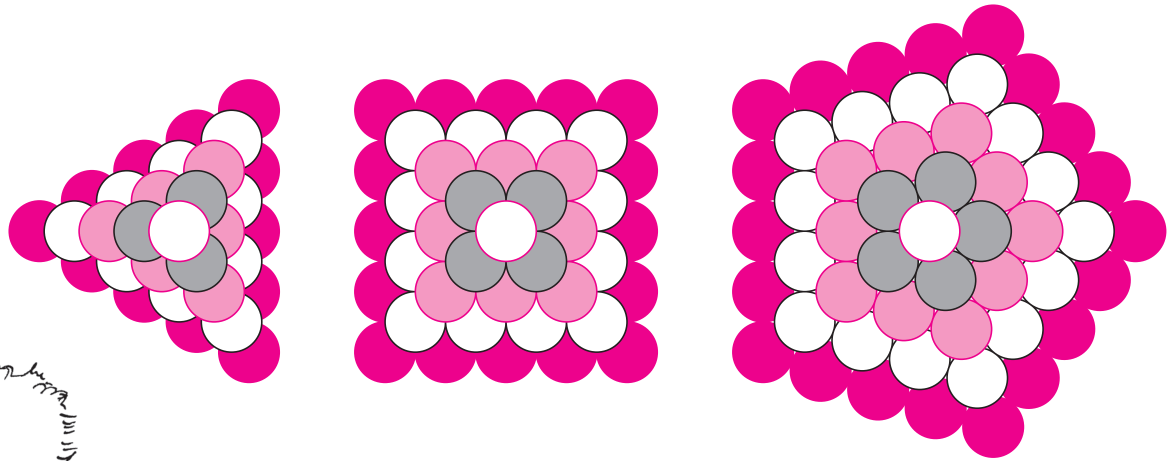
czworościan　sześcian　ośmiościan　dwunastościan　dwudziestościan



A na dodatek trudno określić, jak miałyby wyglądać kolejne wyrazy takich ciągów – zresztą proszę spróbować.

Dla sześcianu można to sobie jeszcze wyobrazić: $1, 8, 27, \ldots$ Może jeszcze dla czworościanu i ośmiościanu daje się coś wymyślić. Ale np. jak by to było dla dwudziestościanu?

Dlatego więc bardziej popularne są *liczby piramidalne*.



Jak widać na rysunkach, jest to wynik układania na kulkach reprezentujących n-tą liczbę k-kątną kulek reprezentujących $(n-1)$-szą liczbę k-kątną, aż do pojedynczej kulki.

Na rysunku z lewej jest piąta liczba piramidalna trójkątna, czyli 35. Na pozostałych rysunkach można policzyć, ile kulek składa się na piątą liczbę piramidalną czworokątną i piątą liczbę piramidalną pięciokątną. Ale można też – korzystając z faktu, że n-ta liczba piramidalna k-kątna jest sumą początkowych n liczb k-kątnych – wyprowadzić sobie wzór na nią. Proszę sprawdzić, że otrzymamy

$$\frac{n(n+1)\cdot((k-2)(n-1)+3)}{6}.$$

Dla liczb piramidalnych czworokątnych będzie to akurat suma kwadratów początkowych n liczb. A czy są tu jeszcze jakieś inne ciekawostki?

Od sytuacji dwuwymiarowej (wielokąty) przeszliśmy do sytuacji trójwymiarowej (piramidy, czyli wielościany), a co dalej? Gdy braknie nam wyobraźni, zawsze mamy jeszcze możność posługiwania się analogiami. Liczby piramidalne, czyli trójwymiarowe, otrzymaliśmy przez sumowanie liczb wielokątnych, czyli dwuwymiarowych. Możemy więc – przez analogię – przyjąć następującą definicję:

n-tą liczbą k-kątną w-wymiarową nazywamy liczbę będącą sumą pierwszych n liczb k-kątnych $(w-1)$-wymiarowych.

Jakie to liczby? Początek znamy: n-te liczby k-kątne dwuwymiarowa i trójwymiarowa to (patrz wyżej)

$$\frac{n}{2}((k-2)(n-1)+2) \quad \text{i} \quad \frac{n(n+1)}{6}((k-2)(n-1)+3).$$

Wpadamy więc na pomysł, że może n-ta liczba k-kątna czterowymiarowa to

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{24}((k-2)(n-1)+4).$$

Drogi Czytelniku, sprawdź, korzystając z definicji, że ten pomysł jest rzeczywiście trafny.

A dla prawdziwych Bohaterów Zmagań Rachunkowych mamy do sprawdzenia dwie postacie wzoru na n-tą liczbę k-kątną w-wymiarową

$$\binom{n+w-1}{w}\cdot\frac{(k-2)\cdot(n-1)+w}{n+w-1}=\binom{n+w-2}{n-1}\cdot\frac{(k-2)\cdot(n-1)+w}{w}.$$

*Małą Deltę przygotował Michał KOSACKI**

Rozwiązanie zadania M 1324.
Zauważmy, że liczba $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ jest całkowita wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^n$ jest całkowita. Wystarczy zatem rozważyć przypadek $n=1$. Załóżmy nie wprost, że $c(a+b)=kab$ dla pewnej liczby całkowitej k. Wiemy, że $a,b>1$. Możemy założyć bez utraty ogólności, że a i b są względnie pierwsze (jeśli nie są, to ich wspólny dzielnik dzieli też c i możemy podzielić przez niego wszystkie trzy dane liczby). Wówczas a i $a+b$ też są względnie pierwsze. Zatem, skoro $a\,|\,c(a+b)$, to $a\,|\,c$. Ale wtedy $a^2\,|\,c^2-a^2=b^2$, więc $a\,|\,b$, co daje sprzeczność.

Użyty obok symbol Newtona $\binom{p}{q}$ to skrót napisu

$$\frac{p!}{q!(p-q)!}.$$

*student, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie