

# Diagramy Woronoja, czyli co widać z góry?

Mirosław KOWALUK\*

Georgij Woronoj (1868–1908) urodził się na Ukrainie, studiował w Sankt Petersburgu, a znaczną część swojego krótkiego życia spędził w Warszawie, wykładając na tutejszym Uniwersytecie.

Wprowadzając w naszych rozważaniach ograniczamy się do przestrzeni euklidesowej, ale diagram Woronoja jest pojęciem znacznie szerszym – można go zdefiniować w dowolnej metryce  $L_p$  dla  $1 \leq p \leq \infty$ , w wyższych wymiarach, dla centrów będących odcinkami, okręgami, punktami z wagami mającymi wpływ na odległość itp.

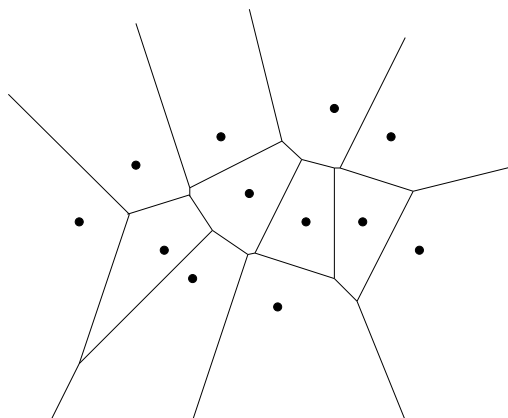


Kiedy wędrujemy po pustyni i pocujemy zmęczenie, poszukujemy najbliższej oazy, w której moglibyśmy zregenerować siły. Jeśli mamy szczęście, możemy spotkać na pustyni beduina, który wskaże nam właściwy kierunek do oazy. Czy rzeczywiście właściwy?

Gdybyśmy mogli unieść się w górę, zobaczylibyśmy interesujące nas obiekty znajdujące się w okolicy. Jak szybko określić, który z nich jest najbliższy? W tym celu moglibyśmy wykorzystać diagram Woronoja.

Załóżmy, że obiektom, którymi jesteśmy zainteresowani, odpowiada zbiór  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  punktów na płaszczyźnie, które będziemy nazywać *centrami*. Odległość między punktami  $p, q \in P$ ,  $p = (x, y)$ ,  $q = (x', y')$ , definiujemy jako  $d(p, q) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ .

**Definicja 1.** Dla każdego centrum  $p_i \in P$  **obszar Woronoja** ( $V(p_i)$ ) składa się z tych punktów płaszczyzny, dla których żadne inne centrum nie znajduje się bliżej niż  $p_i$ , tzn.  $V(p_i) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \forall_{j \neq i} d(x, p_j) \geq d(x, p_i)\}$ . Punkty należące do brzegów obszarów Woronoja tworzą **diagram Woronoja**.



Rys. 1. Diagram Woronoja.

Zauważmy, że centrum zawsze należy do odpowiadającego mu obszaru. Co więcej, do każdego obszaru należy tylko jedno centrum. Granicę między obszarami dla dwóch centrów  $p$  i  $q$  wyznacza symetralna odcinka  $pq$ . Zatem obszar Woronoja dla  $p_i$  jest częścią wspólną półpłaszczyzn wyznaczonych przez symetralne odcinków  $p_i p_j$  (dla  $i \neq j$ ) i zawierających  $p_i$ . Stąd wniosek, że obszary Woronoja są wielokątami wypukłymi (ograniczonymi lub nie), a krawędzie diagramu Woronoja są odcinkami lub półprostymi. Liczba krawędzi diagramu Woronoja jest liniowa względem liczby centrów, co uzasadnimy nieco dalej.

Wierzchołki diagramu Woronoja znajdują się w tej samej odległości od co najmniej trzech najbliższych centrów. Aby uprościć dalsze rozważania, przyjmijmy, że wierzchołek diagramu jest częścią wspólną dokładnie trzech obszarów Woronoja. Wtedy centra obszarów mających wspólny wierzchołek wyznaczają trójkąt. Ponieważ przeciwległe wierzchołki czworokąta nie mogą wyznaczać dwóch par sąsiadujących obszarów Woronoja, więc dwie różne krawędzie takich trójkątów nie mają innych punktów wspólnych niż końce. Wszystkie zdefiniowane w ten sposób trójkąty tworzą tzw. triangulację Delaunay.

**Definicja 2.** **Triangulacja Delaunay** to graf dualny do diagramu Woronoja. Wierzchołki triangulacji (centra obszarów) odpowiadają ścianom diagramu Woronoja (obszarami Woronoja). Natomiast odpowiednikami krawędzi triangulacji są krawędzie diagramu.

Zauważmy, że odpowiadające sobie krawędzie nie muszą się przecinać.



Pominięcie założenia, że wierzchołek diagramu jest częścią wspólną dokładnie trzech obszarów, może w niektórych przypadkach prowadzić jedynie do niejednoznaczności rozwiązań, czego chcieliśmy uniknąć w tym artykule.

Boris Delaunay (1890–1980) był Rosjaninem, a nazwisko odziedziczył po francuskich przodkach.

\*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

### Inne rozwiązanie zadania M 1389

W *Delcie* 6/2013 opublikowane zostało interesujące zadanie M 1389 wraz z ciekawym rozwiązaniem. Chciałbym zaproponować inne rozwiązanie tego zadania.

**M 1389.** Dana jest liczba wymierna  $a_1 = 0,(b_1b_2 \dots b_n)$ , w której zapisie dziesiętnym blok cyfr  $b_1b_2 \dots b_n$  powtarza się okresowo po przecinku. Rozważmy liczby

$$\begin{aligned} a_2 &= 0,(b_2b_3 \dots b_nb_1), \\ a_3 &= 0,(b_3b_4 \dots b_nb_1b_2), \dots, \\ a_n &= 0,(b_nb_1 \dots b_{n-1}) \end{aligned}$$

powstałe z  $a_1$  przez cykliczne przesunięcia cyfr w bloku. Udowodnić, że

$$b_1 + \dots + b_n = 9(a_1 + \dots + a_n).$$

*Rozwiązanie.* Zauważmy, że

$$\begin{aligned} (1) \quad 10a_1 &= 10 \cdot 0,(b_1b_2 \dots b_n) = \\ &= 10 \cdot 0,b_1(b_2 \dots b_nb_1) = \\ &= b_1,(b_2b_3 \dots b_nb_1) = \\ &= b_1 + 0,(b_2b_3 \dots b_nb_1). \end{aligned}$$

Zatem  $10a_1 = b_1 + a_2$ .

Analogicznie dostajemy

$$(2) \div (n-1) \quad 10a_i = b_i + a_{i+1}$$

oraz

$$(n) \quad 10a_n = b_n + a_1.$$

Dodając stronami równości (1)  $\div$  (n), otrzymujemy

$$\begin{aligned} 10(a_1 + a_2 + \dots + a_n) &= \\ = b_1 + b_2 + \dots + b_n + (a_1 + a_2 + \dots + a_n), \end{aligned}$$

a stąd

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = 9(a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Marian MACIOCHA



### Rozwiązanie zadania M 1393.

Oznaczmy przez  $\sigma_k$  operację polegającą na zmianie znaku na  $k$ -tej współrzędnej

$$\begin{aligned} \sigma_k(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) &= \\ = (x_1, \dots, -x_k, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla dowolnego punktu  $x \in \{-1, 1\}^n$  zachodzi równość

$$f(x) - f(\sigma_k(x)) = 2\alpha_k x_k.$$

Z drugiej strony, skoro  $f$  przyjmuje tylko wartości 1 i  $-1$ , to ta różnica może przyjmować tylko trzy wartości:  $-2, 0$  i  $2$ . Zatem dla tych  $\alpha_k$ , które są niezerowe, musi być  $\alpha_k \in \{-1, 1\}$ .

Wykażemy teraz, że funkcja  $f$  ma dokładnie jeden niezerowy współczynnik. Załóżmy przeciwnie, że ma przynajmniej dwa, np.  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że  $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$ . Wówczas, oznaczając przez  $c = \alpha_3 + \dots + \alpha_n$ , mamy

$$f(1, 1, 1, \dots, 1) = 2 + c,$$

$$f(1, -1, 1, \dots, 1) = c,$$

$$f(-1, -1, 1, \dots, 1) = -2 + c.$$

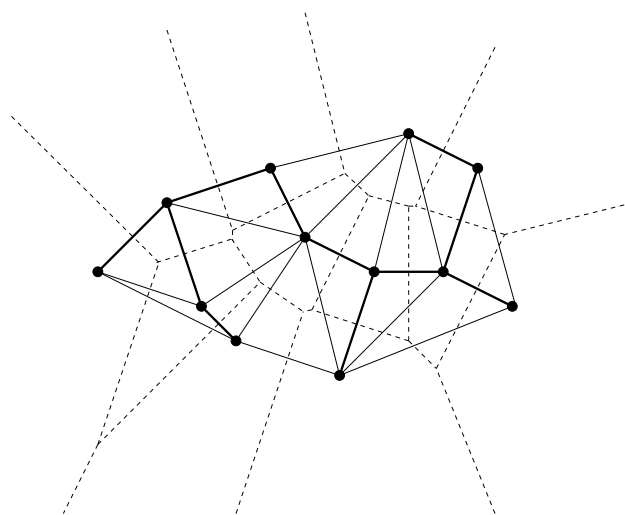
Innymi słowy,  $f$  przyjmuje w tych trzech punktach trzy różne wartości, co przeczy temu, że wartości  $f$  należą do zbioru dwuelementowego. Zatem  $f$  jest postaci  $\pm x_k$  dla pewnego  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

Triangulacja Delaunay jest grafem planarnym, a krawędzie ściany zewnętrznej wyznaczają otoczkę wypukłą zbioru  $P$ , tzn. brzeg najmniejszego zbioru wypukłego zawierającego  $P$ . Innymi słowy, wierzchołkami tej otoczki wypukłej są centra nieograniczonych obszarów Woronoja zbioru  $P$ . Z własności grafów planarnych (twierdzenie Eulera) otrzymujemy, że liczba krawędzi triangulacji Delaunay jest liniowa względem liczby centrów. To pokazuje zarazem, że liczba krawędzi diagramu Woronoja jest liniowa względem liczby centrów.

Wierzchołki trójkąta należącego do triangulacji Delaunay wyznaczają okrąg o środku w wierzchołku diagramu Woronoja (gdyby na okręgu znajdowało się więcej centrów z  $P$ , to wyznaczany przez nie wielokąt moglibyśmy striangulować na różne sposoby). Spróbujmy uogólnić ten fakt.

**Twierdzenie 1.** *Odcinek  $\overline{p_i p_j}$ , gdzie  $p_i, p_j \in P$ , należy do triangulacji Delaunay wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje okrąg przechodzący przez  $p_i$  i  $p_j$ , który nie zawiera w swoim wnętrzu punktów z  $P$ .*

*Dowód.* Implikacja w prawą stronę wynika z konstrukcji triangulacji Delaunay. Musimy wykazać implikację w przeciwnym kierunku. Środek okręgu przechodzącego przez  $p_i$  i  $p_j$ , który nie zawiera w swoim wnętrzu punktów z  $P$ , z definicji należy do krawędzi diagramu Woronoja oddzielającej  $V(p_i)$  i  $V(p_j)$ . Zatem odcinek  $\overline{p_i p_j}$  jest krawędzią triangulacji Delaunay.  $\square$



Rys. 2. Triangulacja Delaunay i euklidesowe minimalne drzewo rozpinające.

Pokażmy jeszcze jedną ciekawą własność triangulacji Delaunay.

**Definicja 3.** **Euklidesowe minimalne drzewo rozpinające** dla zbioru punktów  $P$ , które oznaczamy przez  $EMST(P)$ , jest drzewem łączącym wszystkie punkty z  $P$  i minimalizującym całkowitą długość krawędzi.

**Twierdzenie 2.**  $EMST(P)$  jest podgrafem triangulacji Delaunay zbioru  $P$ .

*Dowód.* Załóżmy, że teza nie jest prawdziwa. Niech  $ab$  będzie krawędzią  $EMST(P)$ , która nie należy do triangulacji Delaunay zbioru  $P$ . Wtedy, zgodnie z poprzednim twierdzeniem, okrąg o średnicy  $\overline{ab}$  zawiera w swoim wnętrzu punkt  $p \in P$ . Odcinki  $\overline{ap}$  i  $\overline{bp}$  są krótsze od  $\overline{ab}$ . Zatem krawędź  $\overline{ab}$  możemy zastąpić jednym z nich, nie niszcząc spójności grafu i zmniejszając całkowitą długość jego krawędzi. Jest to sprzeczne z założeniem, że  $ab \in EMST(P)$ .  $\square$

W obliczeniach numerycznych ma zastosowanie jeszcze jedna, znacznie trudniejsza do udowodnienia, własność triangulacji Delaunay. Uporządkujmy niemalejąco kąty wszystkich trójkątów tworzących dowolną triangulację  $T$  zbioru  $P$ . Następnie uporządkujmy leksykograficznie wszystkie triangulacje zbioru  $P$  (tzn. dla  $T_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  oraz  $T_j = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ , zachodzi  $T_i < T_j \Leftrightarrow \exists_{k \in \{1, \dots, m\}} (\forall_{h < k} \alpha_h = \beta_h \wedge \alpha_k < \beta_k)$  i  $T_i = T_j \Leftrightarrow \forall_{k \in \{1, \dots, m\}} \alpha_k = \beta_k$ ). Wtedy triangulacja Delaunay będzie ostatnim elementem tego porządku, tzn. triangulacja ta maksymalizuje minimalny kąt w tworzących ją trójkątach.

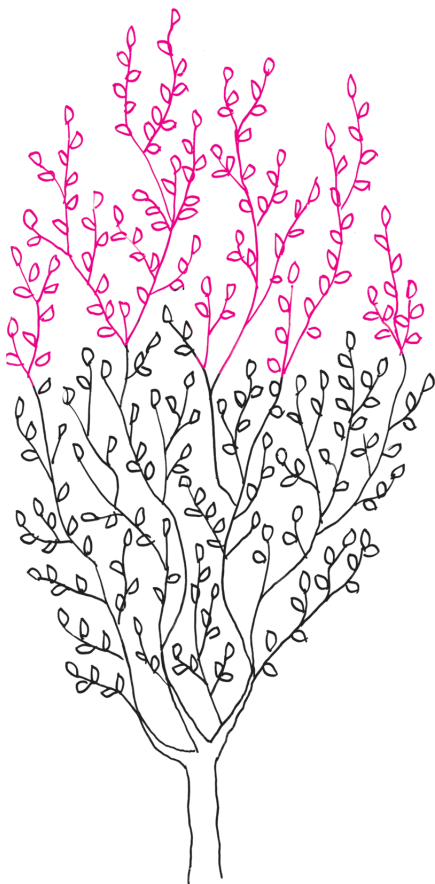
**Odpowiedź na pytanie czy zawsze? ze strony 17.**

Zawsze, choć konstrukcja może się nie udać, gdy dwie z prostych  $k, l, m$  są prostopadłe, a my wybierzemy prostą  $b$  prostopadłą do trzeciej z nich. Ale wybór jako  $b$  prostej prostopadłej do jednej z prostych prostopadłych pozwala konstrukcję wykonać.

Przyczyna opisanego tu niepowodzenia polega na tym, że gdy dwie symetralne są prostopadłe, to trójkąt jest prostokątny i jeden z jego boków przechodzi przez punkt przecięcia symetralnych.

Wiedząc, że diagram Woronoja i triangulacja Delaunay mają tyle interesujących własności, spróbujemy skonstruować te grafy. Oczywiście, na mocy ich dualności wystarczy znaleźć tylko jeden z nich. Aby wyznaczyć diagram Woronoja, można zastosować pewne standardowe metody, np. „dziel i zwyciężaj” lub zamiatanie.

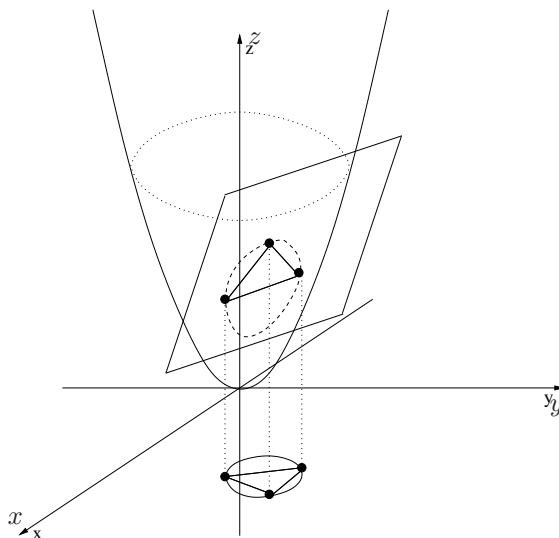
Ale my znów spróbujemy unieść się w górę. Mianowicie, założymy, że punkty ze zbioru  $P$  należą do płaszczyzny  $z = 0$ . Zrzutujemy zbiór  $P$  równoległe do osi  $z$  na paraboloidę obrotową  $z = x^2 + y^2$ . Zauważmy, że obrazy punktów należących do okręgu zawartego w płaszczyźnie  $z = 0$  będą współpłaszczyznowe. Rzeczywiście, jeśli punkt  $(x, y)$  spełnia równanie  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , to w przestrzeni trójwymiarowej punkt  $(x, y, x^2 + y^2)$  należy do płaszczyzny  $z = 2ax + 2by + r^2 - a^2 - b^2$ . Zatem rzuty okręgów opisanych na trójkątach triangulacji Delaunay wyznaczają płaszczyzny przecinające paraboloidę i zawierające rzuty wierzchołków odpowiednich trójkątów. Co więcej, na mocy wypukłości paraboloidy obrotowej płaszczyzny te nie rozdzielają obrazów punktów z  $P$ , gdyż wnętrza okręgów opisanych na trójkątach triangulacji Delaunay (których rzuty są odcinane z paraboloidy przez omawiane płaszczyzny) nie zawierają punktów z  $P$ . Zatem rzuty ścian triangulacji Delaunay są ścianami otoczki wypukłej obrazów punktów z  $P$ , a rzuty krawędzi triangulacji są krawędziami otoczki wypukłej.



Gdyby wymyślenie takiego algorytmu „dziel i zwyciężaj” sprawiło komuś trudność, to jego opis można znaleźć np. w książce F.P. Preparaty i M.I. Shamosa *Geometria obliczeniowa. Wprowadzenie*.



Jeśli  $z = p_v(x, y)$  jest równaniem płaszczyzny stycznej do paraboloidy w punkcie będącym obrazem punktu  $v \in P$ , to brzeg  $W$  tworzą punkty ze zbioru  $\{(x, y, z) : z = \max_{v \in P} \{p_v(x, y)\}\}$ .



Rys. 3. Rzut trójkąta triangulacji Delaunay na paraboloidę.

Zatem nie pozostaje nam nic innego, jak znaleźć otoczkę wypukłą zbioru punktów w przestrzeni trójwymiarowej. Możemy to zrobić, stosując np. metodę „dziel i zwyciężaj”. Złożoność obliczeniowa tego algorytmu wynosi  $O(n \log n)$ . Następnie rzutujemy z powrotem na płaszczyznę  $z = 0$  ściany otoczki wypukłej ograniczające ją od dołu i w ten sposób otrzymujemy triangulację Delaunay zbioru  $P$ . Ponieważ wszystkie rzutowania możemy wykonać w czasie  $O(n)$ , więc całkowita złożoność tego algorytmu wynosi  $O(n \log n)$ . Jest on więc nie tylko prosty, ale też efektywny.

#### Algorytm

**Dane:** Zbiór  $n$  punktów  $P$  na płaszczyźnie  $z = 0$ .

**Wynik:** Triangulacja Delaunay zbioru  $P$ .

Zrzutuj zbiór  $P$  równoległe do osi  $z$  na paraboloidę  $z = x^2 + y^2$ ;

Znajdź otoczkę wypukłą zbioru obrazów punktów z  $P$ ;

Zrzutuj prostopadłe ściany otoczki wypukłej ograniczające ją od dołu na płaszczyznę  $z = 0$ ;

**return** Graf powstały na płaszczyźnie  $z = 0$ ;

Można również wykazać, że rzut prostopadły na płaszczyznę  $z = 0$  minimalnego wielościanu wypukłego  $W$  zawierającego paraboloidę  $z = x^2 + y^2$ , którego ściany zawierają się w płaszczyznach stycznych do tej paraboloidy w obrazach punktów z  $P$ , jest diagramem Woronoja zbioru  $P$ . Dowód tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.