Szansa na sukces

Metoda probabilistyczna gościła już na łamach *Delty* (np. w numerach 12/2006 i 4/2015), byłoby jednak nieprawdopodobnie głupio pominąć ją w numerze poświęconym dowodom. W najbardziej podstawowej wersji może się ona okazać przydatna w sytuacji, gdy chcemy wykazać istnienie obiektu spełniającego określone warunki – wówczas możemy spróbować przedstawić schemat losowania badanych obiektów, w którym z dodatnim prawdopodobieństwem wynik będzie spełniał przedstawione żądania. Opis ten może brzmieć dość enigmatycznie, powinien stać się bardziej zrozumiały po lekturze poniższego rozumowania, uchodzącego za jeden z pierwszych przykładów zastosowania metody probabilistycznej.

Rozważmy graf pełny, którego każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią w kolorze niebieskim bądź czerwonym. Okazuje się, co udowodnił Frank Ramsey w 1930 roku, że dla dowolnie zadanych liczb naturalnych k, l, jeśli liczba wierzchołków w grafie pełnym jest dostatecznie duża, istnieje w nim podgraf o k wierzchołkach połączonych wyłącznie niebieskimi krawędziami lub podgraf o l wierzchołkach, z których każde dwa połączone są krawędziami czerwonymi.

Podgraf danego grafu powstaje przez usunięcie z niego pewnej liczby wierzchołków wraz ze wszystkimi przylegającymi do nich krawędziami.

Najmniejszy z tych „dostatecznie dużych” rozmiarów wyjściowego grafu nazywamy *liczbą Ramseya* i oznaczamy przez $R(k, l)$.

Więcej o liczbach Ramseya przeczytać można w *Delcie* 3/2008.

W 1947 roku Paul Erdős przedstawił następujące oszacowanie z dołu liczby $R(k, k)$

$$(\star) \qquad \binom{R(k,k)}{k} \geqslant 2^{\binom{k}{2}-1}.$$

Oto jak uzyskał ten wynik: rozważmy graf o n wierzchołkach, gdzie n jest „niedostatecznie duże”, czyli $\binom{n}{k} < 2^{\binom{k}{2}-1}$. Pokażemy, że możemy pokolorować krawędzie tego grafu w taki sposób, by nie istniał podgraf rozmiaru k o wszystkich krawędziach w tym samym kolorze; zatem natychmiastowym wnioskiem będzie nierówność $(\star)$.

Każdą z krawędzi naszego grafu pomalujmy na niebiesko z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ lub na czerwono z tym samym prawdopodobieństwem. Wybierzmy dowolny podgraf o k wierzchołkach – wówczas zdarzenie, polegające na pomalowaniu wszystkich krawędzi wybranego podgrafu (których jest $\frac{k(k-1)}{2}$, inaczej $\binom{k}{2}$) na ten sam kolor, ma prawdopodobieństwo $2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}$. Podgrafów o k wierzchołkach jest jednak $\binom{n}{k}$. Szansa na to, że pewien z tych podgrafów ma krawędzie pomalowane na jeden kolor, nie przekracza $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$, zatem zgodnie z założeniem o „niedostatecznie dużym” n jest mniejsza od 1. W tej sytuacji szansa na to, że żaden z podgrafów o k wierzchołkach nie ma wszystkich krawędzi w tym samym kolorze, jest dodatnia, co dowodzi istnienia żądanego kolorowania.

Skorzystaliśmy z fundamentalnej nierówności rachunku prawdopodobieństwa, zgodnie z którą prawdopodobieństwo (przeliczalnej) alternatywy zdarzeń nie przekracza sumy prawdopodobieństw tych zdarzeń.

Łukasz RAJKOWSKI

Jak się pozbyć losowości?

W informatyce *losowość* jest bardzo przydatna. Często bardzo ułatwia rozumowania, pozwala na piękne i klarowne argumenty używające, na przykład, metody probabilistycznej. Nieraz łatwo znaleźć algorytm używający losowości (*randomizowany*) i działający szybko, podczas gdy znalezienie szybkiego algorytmu deterministycznego jest trudne lub w ogóle takiego nie znamy. Z losowością jest jednak pewien problem. Chciałoby się wiedzieć coś na pewno, a nie tylko z dużą dozą prawdopodobieństwa. Szczęśliwie okazuje się, że czasami da się tę losowość wprowadzić, a potem wyeliminować. Ta ostatnia operacja, eliminacja losowości, nazywa się *derandomizacją*.

Przedstawimy dwie metody derandomizacji. Zrobimy to na przykładzie, choć użyte techniki będą zdecydowanie bardziej ogólne. Rozważmy graf