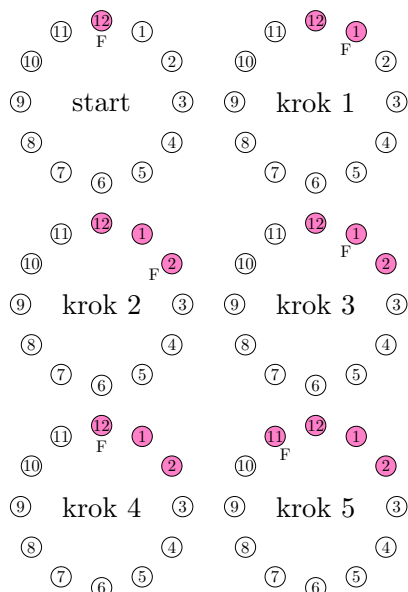
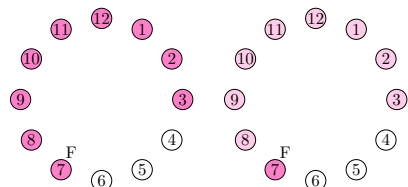


# Ostatni Mohikanin

Łukasz RAJKOWSKI



Początek przykładowej trajektorii fajki (F). Kolorem oznaczeni są Indianie, którzy zdążyli zapalić.



Moment pierwszego dojścia do bezpośredniego sąsiedztwa „szóstki” oraz to, jak wygląda ta sytuacja z punktu widzenia jego potencjalnej „ostatniości”.

Zacznijmy od następującego zadania: dwunastu Indian (dla ustalenia uwagi i zgrabności tytułu przyjmijmy, że pochodzą oni z plemienia Mohikanów) siedzi dookoła ogniska i pali fajkę pokoju. Procedura rozpoczyna się rzecz jasna od Wodza, który po zapaleniu rzuca zdobytą od białych twarzy symetryczną monetą i w zależności od wyniku podaje fajkę na lewo albo na prawo. Kolejny Indianin robi to samo – pali fajkę, rzuca monetą i podaje dalej (fajkę, nie monetę). Nietrudno uwierzyć, że prędzej czy później fajka wpadnie w ręce ostatniego Indianina, który jej wcześniej nie palił (będzie to tytułowy *ostatni Mohikanin*). Oczywiście, na samym początku nie jesteśmy w stanie stwierdzić, kto nim będzie, gdyż przedstawiona procedura jest losowa. Zapewne jednak niektórzy z Mohikanów mają większą szansę na bycie ostatnim Mohikaninem niż inni. Naturalne jest w tej sytuacji pytanie: który z nich ma na to szansę *największą*?

Wydaje się, że Indianie o numerach 1 i 11 nie są dobrymi kandydatami – każdy z nich ma prawdopodobieństwo 50% otrzymania fajki już w pierwszym ruchu. Analiza sytuacji Indian o numerach 2 i 10 zdaje się bardziej skomplikowana, intuicja podpowiada jednak, że ich szansa na bycie ostatnimi jest większa niż sąsiadów Wodza. Idąc tym tropem, największą szansę na bycie ostatnim powinien mieć Indianin siedzący najdalej od Wodza, czyli ten o numerze 6. Przedstawionym domysłem daleko jednak do matematycznej ścisłości i nic dziwnego – prowadzą bowiem do błędnych wniosków. Tak naprawdę *każdy Indianin (poza Wodzem) ma to samo prawdopodobieństwo zapalenia fajki jako ostatni!* Jak to możliwe?

Z punktu widzenia Mohikanina numer 1 sytuacja wygląda następująco: fajka znajduje się u jego sąsiada (Wodza) i pytamy o prawdopodobieństwo tego, że fajka zdąży odwiedzić pozostałych Indian, zanim trafi do „jedyńki”. Rozważmy teraz Indianina o numerze 6. Zauważmy, że niezależnie od trajektorii fajki przyjdzie taki moment, że fajka po raz pierwszy wyląduje w *bezpośrednim sąsiedztwie* „szóstki”. Jeśli ma on palić jako ostatni, to tak czy inaczej począwszy od tego momentu fajka *musi* odwiedzić wszystkie wierzchołki poza „szóstką”, zanim do niego trafi (ze sposobu przekazywania fajki wynika, iż dotychczas odwiedzone wierzchołki nie mają znaczenia, gdyż i tak będą musiały zostać odwiedzone jeszcze raz). Jest to dokładnie ta sama sytuacja, jaka na początku była widziana *oczami Indianina numer 1*. Pokazaliśmy zatem, że

*na pewno dojdzie do zdarzenia, pod warunkiem którego szansa „szóstki” na bycie ostatnim jest taka, jak szansa (bezwarunkowa) „jedyńki” na bycie ostatnim.*

Oznacza to, że (bezwarunkowa) szansa „szóstki” na bycie ostatnim jest taka sama, jak szansa jedynki – oczywiście w ten sam sposób możemy pokazać, że szansa dowolnego Indianina (poza Wodzem) na bycie ostatnim Mohikaninem jest taka sama, wynosi zatem 1/11.

Wyobraźmy sobie teraz, że mamy do czynienia z rzutkami Indianami, którzy nie mają nic przeciwko rzucaniu fajką pokoju i czynią to bardzo celnie. Reguły gry są podobne – po wypaleniu fajki każdy z Indian z równym prawdopodobieństwem wybiera któregoś z pozostałych, aby przekazać mu fajkę. Oczywiście, ze względu na symetrię sytuacji, wciąż jest prawdą to, że każdy z Indian ma to samo prawdopodobieństwo zostania ostatnim Mohikaninem, niezależnie od początkowego położenia fajki. A co by było, gdyby między nimi występowały jakieś animozje, tzn. nie każda para Indian byłaby skłonna przekazać między sobą fajkę? Czy istnieje inna struktura sympatii i antypatii poza *cyklem* (każdy z Indian lubi wyłącznie swoich sąsiadów; rozważyliśmy ten przypadek w pierwszej części artykułu) i *kliką* (każdy z Indian darzy się sympatią), w której zachodzi przedstawiona wcześniej własność? Okazuje się, że nie, co uzasadniamy dalej.

Zaprezentowany fakt został udowodniony w artykule Lászlo Lovásza i Petera Winklera *A note on the last new vertex visited by a random walk*, opublikowanym w 1993 r. w czasopiśmie *Journal of Graph Theory*.

Rozpocznijmy od przedstawienia naszego problemu w języku teorii grafów. Mamy do czynienia z grafem  $\mathcal{G} = (V, E)$  o  $n$  wierzchołkach, po którym w losowy sposób spacerujemy – stojąc w dowolnym wierzchołku, z jednakowym prawdopodobieństwem wybieramy dowolnego jego sąsiada, aby przejść do niego w następnym kroku. Niech  $p_u(v)$  będzie prawdopodobieństwem zdarzenia, że wierzchołek  $v$  został odwiedzony jako ostatni, jeśli startowaliśmy z  $u$ . Interesujący nas warunek możemy teraz zapisać jako

$$(*) \quad \text{dla dowolnych, różnych wierzchołków } u, v \text{ zachodzi } p_u(v) = 1/(n-1).$$

Założmy, że spełniony jest powyższy warunek i wybierzmy dowolne dwa *niepołączone* wierzchołki  $u, v$ . Niech  $d$  będzie stopniem  $u$ , a  $S$  zbiorem jego sąsiadów. Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, dostajemy  $p_u(v) = \frac{1}{d} \sum_{s \in S} p_{u,s}(v)$ , gdzie  $p_{u,s}(v)$  jest prawdopodobieństwem zakończenia na  $v$  jeśli startowaliśmy od  $u$  pod warunkiem zdarzenia, że pierwszym odwiedzonym

wierzchołkiem był  $s$ . Zauważmy ponadto, że  $p_{u,s}(v) \geq p_s(v) \stackrel{(*)}{=} p_u(v)$ , gdyż  $p_{u,s}(v)$  „obejmuje” wszystkie te spacery (liczone od  $s$ ), co  $p_s(v)$  oraz te, które nie odwiedzały  $u$  przed dotarciem do  $v$ . Gdyby istniał choć jeden taki spacer, mielibyśmy  $p_u(v) = \frac{1}{d} \sum_{s \in S} p_{u,s}(v) > \frac{1}{d} \sum_{s \in S} p_s(v) = p_u(v)$ , zatem sprzeczność. Nie istnieje więc spacer, który startuje z sąsiada  $u$ , przechodzi (niekoniecznie jednokrotnie) przez wszystkie wierzchołki poza  $u$  i  $v$ , a na końcu odwiedza  $v$ . Wnioskujemy stąd, że

$$(*) \quad G \setminus \{u, v\} \text{ jest niespójny dla dowolnych niepołączonych } u, v.$$

Okazuje się, że graf, który spełnia  $(*)$  i  $(*)$ , musi być łańcuchem albo kliką. Jest to ciekawe i przystępne zadanie z matematyki dyskretnej, które polecamy wykonać Czytelnikom Ambitnym. Czytelnikom Niecierpliwym polecamy zaś lekturę marginesu. Howgh!



Redaguje Łukasz BOŻYK

**M 1570.** Czy istnieje taki wielościan wypukły  $\mathcal{W}$ , który można rozciąć płaszczyzną na dwa wielościany podobne do  $\mathcal{W}$ ?  
Rozwiązanie na str. 10

**M 1571.** Wewnątrz trójkąta równobocznego  $ABC$  wyznacz zbiór takich punktów  $P$ , że miary kątów  $PAB, PBC, PCA$  tworzą w tej właśnie kolejności ciąg arytmetyczny.  
Rozwiązanie na str. 2

**M 1572.** Oznaczmy przez  $r(n)$  sumę  $n$  liczb będących resztami z dzielenia dodatniej liczby całkowitej  $n$  przez  $1, 2, \dots, n$ . Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele takich  $n$ , że  $r(n) = r(n-1)$ .  
Rozwiązanie na str. 10

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 955.** Na pochylnię tworzącą kąt  $\alpha$  z poziomem należy wciągnąć ciężką paczkę. Dla jakiej rozwartości kąta  $\beta$  między kierunkiem siły wciągającej  $F$  i pochylnią wartość tej siły jest najmniejsza? Współczynnik tarcia paczki o powierzchnię pochylni wynosi  $f$ .  
Rozwiązanie na str. 4

**F 956.** Średnia gęstość Ziemi wynosi  $\rho \approx 5,5 \text{ g/cm}^3$ . Oszacuj wartość ciśnienia  $p$  w środku Ziemi. Przyspieszenie ziemskie (na jej powierzchni) wynosi  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ , a promień Ziemi  $R \approx 6400 \text{ km}$ .  
Rozwiązanie na str. 2

(1) Przyjmujemy, że  $\mathcal{G}$  spełnia  $(*)$  i  $(*)$  oraz nie jest cyklem.  
 (A) nie jest kliką, (B) nie jest cyklem.  
 (V) istnieją dwa niepołączone wierzchołki;  
 (2)  $\Rightarrow$  Zaden wierzchołek nie ma stopnia  $n-1$ ;  
 (3)  $\Rightarrow$  Istnieje wierzchołek dla dowolnego  $x$  (maciej  $p_u(x) = 0$ );  
 (4)  $\Rightarrow$  wszystkie wierzchołki mają stopień  $\geq 2$ ;  
 (5)  $\Rightarrow$  Istnieje wierzchołek stopnia  $\geq 3$  (oznaczmy go  $n$ );  
 (6)  $\Rightarrow$  Istnieje  $v$  niepołączony z  $u$ ;  
 (7)  $\Rightarrow$   $\mathcal{G} \setminus \{u, v\}$  ma co najmniej dwie spójne składowe  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ ;  
 (8)  $\Rightarrow$  Istnieją takie  $c_1 \in \mathcal{C}_1, c_2 \in \mathcal{C}_2$ , że  $\mathcal{G} \setminus \{u, v\}$  jest spójny;  
 (6)  $\Rightarrow$   $\mathcal{G} \setminus \{c_1, c_2\}$  jest spójny;  
 (01)  $\Rightarrow$   $c_1, c_2$  nie są połączone; sprzeczność!  
 (11)  $\Rightarrow$   $[8+9+10]$



## Zadania

