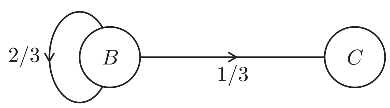
O długowiecznych pchłach i twierdzeniu ergodycznym,
czyli co dzieje się z łańcuchami Markowa po długim czasie

*Katarzyna PIETRUSKA-PAŁUBA**

Przypomnijmy jedno z zagadnień, którym zajmowaliśmy się w pierwszej części artykułu (*Delta* 9/2013). Pchła poruszała się między ziemią (Z), psem (P), kotem (K) i człowiekiem (C), za każdym razem przeskakując w jedno z pozostałych dopuszczalnych położeń. Prawdopodobieństwo wyboru każdego docelowego miejsca skoku było takie samo i równe 1/3. W momencie, gdy pchła wskakiwała na człowieka – ginęła. Wyliczyliśmy, że średni czas życia pchły wynosi 3.

Zastanówmy się teraz nad nieco innym pytaniem. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pchła nadal będzie żyła po wykonaniu n skoków, czyli – oznaczając przez T moment śmierci pchły – ile wynosi $\mathbb{P}(T > n)$? Odpowiedź jest prosta: w każdym swoim skoku pchła albo wskoczy na człowieka (prawdopodobieństwo 1/3), albo przejdzie do stanu bezpiecznego (oznaczymy go B – rys. 1) – z prawdopodobieństwem 2/3.



Rys. 1

Moment śmierci to moment pierwszej wizyty w stanie C. Zatem szukane prawdopodobieństwo to prawdopodobieństwo przebycia n-odcinkowej drogi $B \to B \to B \to \ldots \to B$, czyli $2/3 \cdot 2/3 \cdot \ldots \cdot 2/3 = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Wielkość ta maleje wykładniczo i szybko staje się bliska zeru. Na przykład prawdopodobieństwo tego, że pchła będzie żyła po 10 skokach, to około 0,017, a po 30 skokach: $5{,}22 \cdot 10^{-6}$.

Gdy prawdopodobieństwa przeskoków nie będą zupełnie jednolite, lecz powiedzmy następujące:

$$p_{ZC} = p_{ZK} = p_{ZP} = 1/3, \quad p_{KP} = p_{PK} = 3/4, \quad p_{KC} = p_{PC} = 1/4,$$

albo, na przykład,

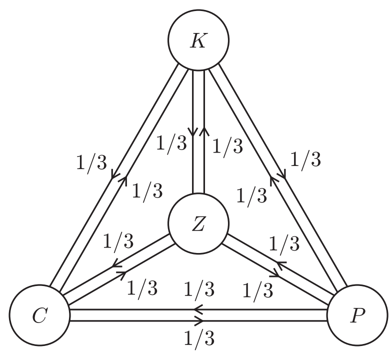
$$p_{ZC} = \mu, \quad p_{ZK} = p_{ZP} = \frac{1}{2}(1-\mu), \quad p_{KC} = p_{PC} = \rho, \quad p_{KP} = p_{PK} = (1-\rho),$$

to nawet dla niewielkich, byleby wciąż dodatnich wartości μ i ρ, prawdopodobieństwo przeżycia będzie nadal wykładniczo szybko malało wraz z upływem czasu.
W pierwszym przypadku będziemy mieli ograniczenie $\mathbb{P}(T > n) \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$, a w drugim – $\mathbb{P}(T > n) \leqslant \max((1-\mu)^n, (1-\rho)^n)$.

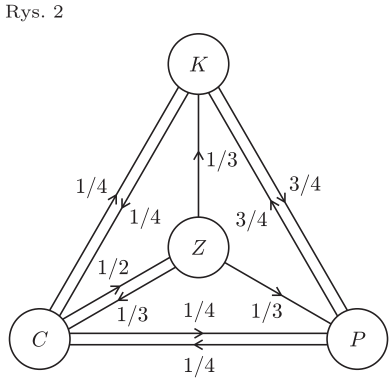
Czytelniku, udowodnij tę nierówność!

W sytuacji takiej jak opisana zachowanie po długim czasie nie jest ciekawe: pchła po skończonym czasie zginie (prawie na pewno), a prawdopodobieństwo przeżycia wykładniczo zanika.

No to zrezygnujmy z eksterminacji insektów i przypuśćmy, że pchła może skakać, jak długo chce. Rozpatrzymy dwa przypadki: pierwszy, w którym pchła przeskakuje z człowieka z równym prawdopodobieństwem na ziemię, psa i kota (rys. 2), oraz bardziej złożony, kiedy człowiek strąca pchłę na podłogę z prawdopodobieństwem 1/2, a z prawdopodobieństwami po 1/4 pchła przeskakuje na jedno ze zwierząt; z kolei z ziemi pchła skacze z takim samym prawdopodobieństwem na człowieka, psa i kota, a ponadto kiedy pchła jest na zwierzęciu, to z prawdopodobieństwem 3/4 przeskakuje na drugie zwierzę, a z prawdopodobieństwem 1/4 – na człowieka (rys. 3).



Rys. 2



Rys. 3

W przypadku pierwszym (kiedy graf ma postać taką, jak na rysunku 2) zdrowy rozsądek podpowiada, że po długim czasie wpływ miejsca startu na to, gdzie pchła znajdzie się w danej chwili, wygasa, i że dla każdego ze stanów prawdopodobieństwo zastania tam pchły w danym momencie staje się w przybliżeniu równe 1/4 (bo przecież pchła gdzieś być musi). Oznaczmy taki rozkład przez $\mu = (\mu_Z, \mu_C, \mu_K, \mu_P) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Ma on następującą ciekawą własność: jeżeli X_n to położenie pchły w chwili n, wtedy zakładając, że w chwili n zmienna X_n ma rozkład μ (czyli $\mathbb{P}(X_n = Z) = \mathbb{P}(X_n = C) = \mathbb{P}(X_n = K) = \mathbb{P}(X_n = P) = \frac{1}{4}$), dostaniemy, że X_{n+1} ma też rozkład μ.

Sprawdźmy:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = Z) = \mathbb{P}(X_{n+1} = Z | X_n = C)\mathbb{P}(X_n = C) &+ \\ + \mathbb{P}(X_{n+1} = Z | X_n = K)\mathbb{P}(X_n = K) &+ \\ + \mathbb{P}(X_{n+1} = Z | X_n = P)\mathbb{P}(X_n = P) &= \\ = p_{CZ}\mathbb{P}(X_n = C) + p_{KZ}\mathbb{P}(X_n = K) + p_{PZ}\mathbb{P}(X_n = P) &= \\ = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} = \mathbb{P}(X_n = Z)&,\end{aligned}$$

i tak samo dla pozostałych położeń.

Rozkład o takiej własności nazywamy *rozkładem stacjonarnym* dla naszego łańcucha Markowa.

*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Zastanówmy się, czy w drugiej sytuacji, a więc dla łańcucha Markowa o grafie jak z rysunku 3, też istnieje rozkład stacjonarny?

Za pomocą takiego samego rachunku jak wyżej obliczamy, że

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1}=Z) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=C), \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=C) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n=Z) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n=K) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n=P), \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=K) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n=Z) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n=C) + \frac{3}{4}\mathbb{P}(X_n=P), \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=P) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n=Z) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n=C) + \frac{3}{4}\mathbb{P}(X_n=K), \end{cases}$$

czyli składowe rozkładu stacjonarnego muszą spełniać układ równań:

$$\begin{cases} \mu_Z = \frac{1}{2}\mu_C, \\ \mu_C = \frac{1}{3}\mu_Z + \frac{1}{4}\mu_K + \frac{1}{4}\mu_P, \\ \mu_K = \frac{1}{3}\mu_Z + \frac{1}{4}\mu_C + \frac{3}{4}\mu_P, \\ \mu_P = \frac{1}{3}\mu_Z + \frac{1}{4}\mu_C + \frac{3}{4}\mu_K. \end{cases}$$

Układ ten jest zależny; przekształcając go, otrzymujemy: $\mu_C = 2\mu_Z$, $\mu_K = \mu_P = \frac{10}{3}\mu_Z$. Mamy jednak dodatkową informację – wiemy przecież, że $\mu_Z + \mu_C + \mu_K + \mu_P = 1$. Biorąc to pod uwagę, dostaniemy:

$$\mu_Z = \frac{3}{29}, \quad \mu_C = \frac{6}{29}, \quad \mu_K = \mu_P = \frac{10}{29}.$$

A zatem wyznaczyliśmy rozkład stacjonarny. Można też łatwo wywnioskować, że jest on w tym przypadku jedyny.

Czy samo wyznaczenie rozkładu stacjonarnego coś mówi nam o zachowaniu procesu po długim czasie? Okazuje się, że tak – wynika to z jednej z wersji tak zwanego twierdzenia ergodycznego dla łańcuchów Markowa. Aby zwięźle je wysłowić, wprowadźmy kilka oznaczeń. Niech $S = \{E_1, E_2, \ldots, E_M\}$ będzie przestrzenią stanów dla łańcucha (w naszym zadaniu mamy $S = \{Z, C, K, P\}$). Dalej, dla $E_i, E_j \in S$ oznaczmy przez $p_{ij}^{(n)}$ prawdopodobieństwo

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = E_j | X_0 = E_i).$$

Jest to tak zwane prawdopodobieństwo przejścia w n krokach. Zakładamy ponadto, że dla dowolnego $k = 1, 2, \ldots$ mamy

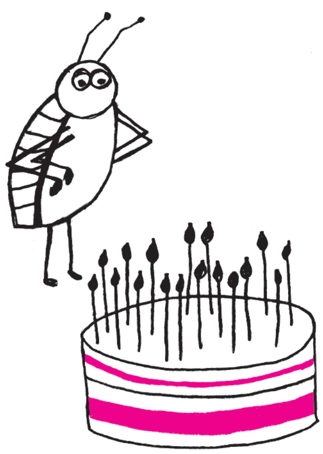
$$\mathbb{P}(X_{n+k} = E_j | X_k = E_i) = \mathbb{P}(X_n = E_j | X_0 = E_i)$$

(ta własność nazywa się *jednorodnością łańcucha w czasie*). Dla $E_i \in S$, *okresem* stanu E_i nazywamy liczbę

$$o(E_i) = \mathrm{NWD}\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

Gdy wszystkie stany $E_i \in S$ mają okres równy 1, to łańcuch Markowa nazywa się nieokresowym.

Jesteśmy teraz gotowi, by sformułować potrzebną nam wersję twierdzenia ergodycznego.



Łańcuch Markowa o założonej w twierdzeniu własności nazywamy *nieprzywiedlnym*.

Twierdzenie. *Niech łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{1, 2, \ldots, M\}$ będzie nieokresowy i jednorodny w czasie. Ponadto załóżmy, że dla dowolnych $i, j \in S$ istnieje takie n, że $\mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) > 0$. Wtedy istnieje dla niego dokładnie jeden rozkład stacjonarny μ, a ponadto dla dowolnych $i, j \in S$ mamy*

$$p_{ij}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_j.$$

Nasz łańcuch spełnia założenia tego twierdzenia: łatwo sprawdzamy, że jest on nieprzywiedlny, a co do braku okresowości – mamy np. $p_{ZZ}^{(2)} > p_{ZC}p_{CZ} > 0$ oraz $p_{ZZ}^{(3)} > p_{ZK}p_{KC}p_{CZ} > 0$, czyli $o(Z) = 1$; podobnie dla pozostałych stanów.

Tak naprawdę to nieokresowości pozostałych stanów nie musimy sprawdzać bezpośrednio: wiadomo bowiem, że jeżeli E_i i E_j są takimi stanami, że dla pewnych m_0, n_0 jest $p_{ij}^{(n_0)} > 0$ oraz $p_{ji}^{(m_0)} > 0$, to $o(E_i) = o(E_j)$.

Zadanie. *Udowodnić powyższe stwierdzenie.*

A zatem – mając wyznaczone rozkłady stacjonarne – możemy zastosować twierdzenie ergodyczne i wywnioskować, że w przypadku łańcucha o grafie z rysunku 2 prawdopodobieństwa tego, że pchła będzie w konkretnym stanie, będą faktycznie wszystkie zmierzały do 1/4, natomiast dla łańcucha o grafie 3 asymptotyczne prawdopodobieństwo tego, że pchła będzie na ziemi, to 3/29, na człowieku – 6/29, a na kocie lub na psie – 10/29.

Można zinterpretować to też następująco: wpuściwszy do pokoju mnóstwo pcheł (N) i każąc im się poruszać zgodnie z zasadami naszego łańcucha, po długim czasie około $\frac{3}{29}N$ pcheł zastaniemy na ziemi, $\frac{6}{29}N$ – na człowieku, a najbardziej zapchlone będą zwierzęta: po $\frac{10}{29}N$ będzie na kocie i na psie.

Czytelnika zainteresowanego takimi i pokrewnymi zagadnieniami odsyłamy do książek:

[1] William Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa,* tom I, wyd. III, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.

[2] Jacek Jakubowski, Rafał Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, wyd. IV, Script, Warszawa 2010.