W ten oto sposób odkryliśmy, że istnieją różne geometrie i żadna z nich nie jest bardziej uprzywilejowana od innych. 10 czerwca 1854 roku Bernhard Riemann, mając 28 lat, w swoim wykładzie habilitacyjnym *O hipotezach, które leżą u podstaw geometrii* poszedł jeszcze dalej. Umieszczając obserwatora wewnątrz przestrzeni (wielowymiarowej rozmaitości), stwierdził, że geometria przestrzeni może się zmieniać od punktu do punktu, tu być hiperboliczną, tam euklidesową, a gdzie indziej sferyczną.

Próby dowodu V aksjomatu Euklidesa:

(1) Niech y będzie innym punktem po tej samej stronie prostej L co punkt x i w tej samej od niej odległości. Połącz x z y prostą (I aksjomat), a następnie przedłuż tę ograniczoną prostą do prostej M (II aksjomat). Wtedy prosta M nie przecina prostej L.

(2) Niech prosta M będzie złożona ze wszystkich punktów po tej samej stronie prostej L co punkt x i będących od niej w tej samej odległości. Otrzymana prosta nie przecina prostej L.

(3) Punkt na płaszczyźnie kartezjańskiej można zapisać za pomocą współrzędnych. Prosta (nie pionowa) L ma równanie $y = mx + c$. Zmieniając c, możemy przesunąć prostą L w górę lub w dół. Żadna z tak otrzymanych prostych nie może się przecinać i każdy punkt należy do dokładnie jednej prostej.

Dzisiaj za sprawą ogólnej teorii względności Alberta Einsteina (1916 r.) i potwierdzającej ją obserwacji Arthura Eddingtona z roku 1919 przyjmujemy, że otaczająca nas przestrzeń (dokładniej czasoprzestrzeń) jest zakrzywiona, choć możliwe, że tego typu zakrzywienia są tylko niewielkimi perturbacjami znacznie większego i bardziej symetrycznego kształtu.

Tytułowe pytanie o kształt Wszechświata jest jednym z wielkich otwartych problemów astronomii (kosmologii) – czy wielkoskalowy kształt Wszechświata, gdyby wyprostować łuki, ugięcia wynikające z obecności gwiazd, galaktyk, czarnych dziur itp., nadal byłby zakrzywiony jak wielka kula, czy też byłby płaski (jak wodne łóżko), a może jest on bardziej skomplikowaną wielowymiarową rozmaitością o ujemnej krzywiźnie. Może Ty masz pomysł, jak to rozstrzygnąć, Czytelniku?

Czułość funkcji logicznych, część 2

*Mariusz ZAJĄC**

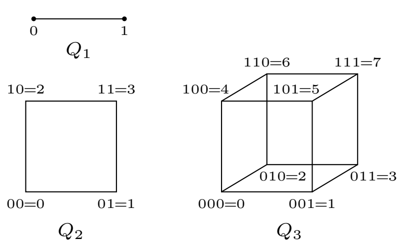
* Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

W pierwszej części artykułu (Δ^7_{20}) omówiliśmy pojęcia funkcji logicznej, jej czułości i przedstawiliśmy, na razie bez dowodów, pewne związane z nimi twierdzenia, udowodnione w pracy [1].

[1] Hao Huang, *Induced subgraphs of hypercubes and a proof of the Sensitivity Conjecture*, `arxiv.org/abs/1907.00847`.

Celem drugiej części jest przedstawienie owych dowodów w wersji nieco uproszczonej w stosunku do oryginalnej pracy [1], ale wciąż wymagającej znajomości podstaw algebry liniowej, w tym mnożenia macierzy i pewnej wiedzy o wymiarze przestrzeni liniowej.

Niech n będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą i niech $N = 2^n$. Zapiszmy elementy zbioru $V_n = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ w układzie dwójkowym (uzupełniając w miarę potrzeby nieznaczącymi początkowymi zerami, tak by każda liczba miała dokładnie n cyfr) i przedstawmy je graficznie w ten sposób, że elementy V_n (zwane wierzchołkami) będą punktami, a odcinki (zwane krawędziami) połączą pary wierzchołków różniące się w układzie dwójkowym tylko jedną cyfrą. Uzyskany graf nazwiemy **n-wymiarową kostką** Q_n (nazwa wiąże się niewątpliwie z podobieństwem Q_3 do szkieletu sześcianu, czyli standardowej kostki do gry).



Rys. 1. Na przykład w Q_{12} połączone będą między innymi $x = 859 = 001101011011_2$ i $y = 843 = 001101001011_2$

Spróbujmy przezwyciężyć fakt, że bezpośrednio odczuwamy istnienie tylko trzech wymiarów, spoglądając na kostki rekurencyjnie: Q_1 to dwa punkty połączone odcinkiem, Q_2 to dwa odcinki, np. dolny i górny, połączone dwiema pionowymi krawędziami, Q_3 to dwie kopie Q_2, np. dolny i górny kwadrat, połączone czterema pionowymi krawędziami, ..., Q_{m+1} to dwie kopie Q_m, połączone 2^m krawędziami i tak dalej.

W terminologii teorii grafów twierdzenie Huanga brzmi: *każdy indukowany podgraf* $G \subseteq Q_n$ *spełnia* $\Delta(G) < \sqrt{n} \Rightarrow |V(G)| \leqslant 2^{n-1}$. Dużo krócej, ale trzeba wpierw wyjaśnić, że $V(G)$ to zbiór wierzchołków grafu G, $\Delta(G)$ to największy stopień wierzchołka (stopień to z kolei liczba krawędzi o końcu w danym wierzchołku), a podgraf indukowany oznacza pewne wierzchołki wraz ze wszystkimi łączącymi je krawędziami Q_n.

Zapowiedziane pod koniec pierwszej części twierdzenie (*jeśli ponad połowę wierzchołków n-wymiarowej kostki zajmują mrówki, to któraś z nich ma co najmniej $\sqrt{n}$ sąsiadek*) możemy sformułować w następujący równoważny sposób.

Twierdzenie (Huang [1]). *Jeśli wyróżnimy niektóre wierzchołki n-wymiarowej kostki Q_n, czyli wybierzemy podzbiór $W \subseteq V_n$, przy zachowaniu warunku, że każdy element W ma mieć mniej niż $\sqrt{n}$ sąsiadów należących do W, to wyróżnione wierzchołki stanowić będą co najwyżej połowę wszystkich wierzchołków kostki, czyli* $|W| \leqslant N/2$.

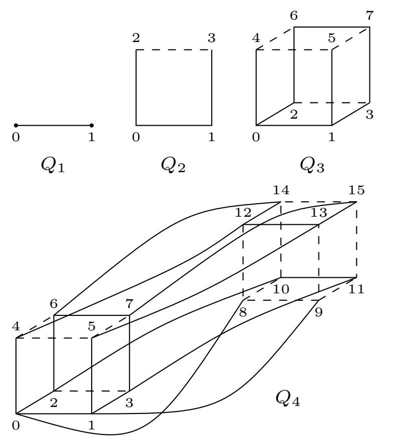
Dowód. Każdemu grafowi można przypisać tzw. **macierz sąsiedztwa**, czyli tablicę liczb mającą tyle wierszy i kolumn, ile graf ma wierzchołków, w której na przecięciu wiersza o numerze k i kolumny o numerze l stoi 1, gdy wierzchołki k i l są połączone krawędzią, a 0, gdy nie są. Macierzami kostek Q_n są A_n, spełniające następujące zależności (tu i dalej I_d oznacza macierz jednostkową rozmiaru $d \times d$):

Dla zgodności z wcześniejszymi oznaczeniami i rysunkiem 1 należałoby najwyższy wiersz i skrajną lewą kolumnę nazwać zerowymi, a nie pierwszymi, wtedy np. w macierzy A_2 wiersze i kolumny mają numery $0, 1, 2, 3$, a podkreślona jedynka oznacza krawędź łączącą wierzchołki 2 i 3.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, A_{m+1} = \begin{bmatrix} A_m & I_{2^m} \\ I_{2^m} & A_m \end{bmatrix}, \ldots$$

Hao Huang minimalnie modyfikuje te macierze, definiując

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, H_{m+1} = \begin{bmatrix} H_m & I_{2^m} \\ I_{2^m} & -H_m \end{bmatrix}, \ldots$$



Rys. 2. Można sprawdzić, że krawędź łącząca x i y jest ciągła dokładnie wtedy, gdy wspólna część zapisów dwójkowych x i y na lewo od cyfry je odróżniającej zawiera parzystą liczbę jedynek. Na przykład dla $x = 859 = 0011010\mathbf{1}1011_2$ i $y = 843 = 0011010\mathbf{0}1011_2$ we fragmencie 0011010 są trzy jedynki, więc krawędź ta jest przerywana

Jak widać, H_n to prawie ta sama macierz kostki, co wcześniejsza A_n, z tym że niektórym krawędziom przypisana jest liczba -1, a nie 1. Jeśli oznaczymy je liniami przerywanymi, to nasze kostki będą wyglądały tak jak na rysunku.

Nas najbardziej zainteresują kwadraty macierzy H_m. Bezpośredni rachunek pokazuje, że

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2,\ H_2^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot I_4,$$

a ponadto

$$H_{m+1}^2 = \begin{bmatrix} H_m & I_{2^m} \\ I_{2^m} & -H_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_m & I_{2^m} \\ I_{2^m} & -H_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_m^2 + I_{2^m} & 0 \\ 0 & H_m^2 + I_{2^m} \end{bmatrix},$$

zatem przez indukcję $H_n^2 = n \cdot I_{2^n}$. Określmy wreszcie $H = \frac{1}{\sqrt{n}} H_n$ i obliczmy $H^2 = \frac{1}{n} H_n^2 = I_N$.

Nietrudno zauważyć, że macierz H_n^2 ma liczby n na głównej przekątnej, bo każdy wierzchołek Q_n ma n sąsiadów. Zera poza przekątną H_n^2 wiążą się zaś z tym, że każda dwuwymiarowa ściana kostki jest kwadratem z trzema bokami ciągłymi i jednym przerywanym lub odwrotnie (widać to na rysunku 2).

Następnym krokiem będzie rozważenie kilku przestrzeni liniowych:

$$U = \mathbb{R}^N = \{(x_0, \ldots, x_{N-1}) : x_i \in \mathbb{R}\},$$
$$U_W = \{(x_0, \ldots, x_{N-1}) \in U : x_i = 0 \text{ dla każdego } i \notin W\},$$
$$U_+ = \{v \in U : Hv = v\} = \{v \in U : H_n v = \sqrt{n} v\},$$
$$U_- = \{v \in U : Hv = -v\} = \{v \in U : H_n v = -\sqrt{n} v\},$$

oraz nieujemnej funkcji rzeczywistej $F_W((x_0, \ldots, x_{N-1})) = \sum_{k \in W} |x_k|$.

Przypomnijmy wreszcie, że zgodnie z założeniem twierdzenia każdy element W ma najwyżej $d = \lceil \sqrt{n} - 1 \rceil < \sqrt{n}$ sąsiadów należących do W, i wykażmy kilka faktów.

Fakt 1. Jeśli $v \in U_W$, to $F_W(H_n v) \leqslant d \cdot F_W(v)$.

Dowód. Z definicji mnożenia macierzy dla $v \in U_W$ mamy $(H_n v)_k = \sum_{l=0}^{N-1} (H_n)_{kl} v_l = \sum_{l \in W} (H_n)_{kl} v_l$, zatem

$$F_W(H_n v) = \sum_{k \in W} \Big| \sum_{l \in W} (H_n)_{kl} v_l \Big| \leqslant \sum_{k \in W} \Big(\sum_{l \in W} |(H_n)_{kl}||v_l| \Big) =$$
$$= \sum_{l \in W} \Big(\sum_{k \in W} |(H_n)_{kl}| \Big) |v_l| \leqslant \sum_{l \in W} d \cdot |v_l| = d \cdot F_W(v),$$

przy czym ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż $|(H_n)_{kl}|$ wynosi 1, jeśli k i l sąsiadują w Q_n, oraz 0, jeśli nie sąsiadują. □

Rozwiązanie zadania M 1645.
Liczby $x_3 = y_3 = 1$ spełniają wymaganą w zadaniu równość. Załóżmy, że nieparzyste liczby x_n, y_n spełniają $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$. Wówczas

$$7\left(\frac{x_n \pm y_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{7x_n \mp y_n}{2}\right)^2 = $$
$$= 2(7x_n^2 + y_n^2) = 2^{n+1}.$$

Skoro x_n, y_n są nieparzyste, to jedna z par $\frac{1}{2}(x_n + y_n, |7x_n - y_n|)$ oraz $\frac{1}{2}(|x_n - y_n|, 7x_n + y_n)$ składa się z dwóch liczb nieparzystych, i tę parę wybieramy jako (x_{n+1}, y_{n+1}). W ten indukcyjny sposób możemy skonstruować rozwiązanie wyjściowego równania dla dowolnej liczby naturalnej n.

Fakt 2. Jeśli $v \in U_W \cap U_+$ lub $v \in U_W \cap U_-$, to $v = 0$.

Dowód. W przeciwnym razie $F_W(v) > 0$ i na mocy faktu 1

$$F_W(v) = F_W(-v) = F_W(Hv) = \frac{1}{\sqrt{n}} F_W(H_n v) \leqslant \frac{d}{\sqrt{n}} \cdot F_W(v) < F_W(v),$$

sprzeczność. □

Fakt 3. Każdy element $v \in U$ da się zapisać w postaci $v = v_+ + v_-$, gdzie $v_+ \in U_+$, $v_- \in U_-$.

Dowód. Istotnie, połóżmy $v_+ = \frac{v+Hv}{2}$, $v_- = \frac{v-Hv}{2}$. Wtedy $Hv_+ = \frac{Hv+H^2v}{2} = \frac{Hv+v}{2} = v_+$, $Hv_- = \frac{Hv-H^2v}{2} = \frac{Hv-v}{2} = -v_-$. □

Na zakończenie przypomnijmy sobie ogólny fakt z algebry liniowej: jeśli U_1 i U_2 są dwiema podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni U, to zbiór $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ jest również przestrzenią liniową wymiaru

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Fakty 2 ($\dim(U_W \cap U_+) = \dim(U_W \cap U_-) = 0$) i 3 ($U_+ + U_- = U$) dają teraz:

$$\dim(U_W) = \dim(U_W + U_+) - \dim(U_+) \leqslant \dim(U) - \dim(U_+),$$
$$\dim(U_W) = \dim(U_W + U_-) - \dim(U_-) \leqslant \dim(U) - \dim(U_-),$$
$$0 \leqslant \dim(U_+ \cap U_-) = \dim(U_+) + \dim(U_-) - \dim(U).\ ^*$$

Dodanie powyższych trzech nierówności daje $2\dim(U_W) \leqslant \dim(U)$, co kończy dowód, gdyż $\dim(U) = N, \dim(U_W) = |W|$. □

*Tak naprawdę Huang dowodzi w pracy, że $\dim(U_+) = \dim(U_-) = N/2$ oraz $U_+ \cap U_- = \{0\}$, bo są to ortogonalne przestrzenie własne, odpowiadające wartościom własnym o dającej się wyznaczyć krotności, ale ta droga stawia przed Czytelnikiem znacznie wyższe wymagania wstępne.

Twierdzenie o czułości

Wróćmy do pomysłu, by w funkcjach boolowskich przyjmować, że liczbową wartością prawdy jest 1, a fałszu −1. Jak może to nam pomóc?

Fakt 4. Gdy w wielomianie n zmiennych żadna zmienna nie występuje w potędze większej niż 1 (nazwijmy taki wielomian **zredukowanym**), to średnia arytmetyczna jego wartości na zbiorze $\{1, -1\}^n$ równa jest wyrazowi wolnemu tego wielomianu.

Każdą funkcję boolowską możemy tak zredukować, gdyż dla $x \in \{1, -1\}$ zachodzi $x^{2k} = 1$, $x^{2k+1} = x$.

Przykład. Jak wiadomo, koniunkcja przyjmuje trzy razy wartość −1 (fałsz) i raz wartość 1 (prawda). Średnią wartością jest więc $\frac{-1-1-1+1}{4} = -\frac{1}{2}$, i taki też jest, jak widzimy obok, wyraz wolny definiującego koniunkcję wielomianu.

$\wedge$	-1	1
-1	-1	-1
1	-1	1

$(x \wedge y) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}xy$

Dowód. Ponieważ średnia sumy dwóch funkcji jest równa sumie średnich, to wystarczy zauważyć, że średnia wartość każdego iloczynu $x_1x_2\ldots x_k$ wynosi 0, czyli że ów iloczyn wynosi 1 lub −1 dokładnie tak samo często. Ale to w zasadzie oczywiste: jakiekolwiek będą wartości pierwszych $k-1$ zmiennych, nasz iloczyn będzie równy 1 lub −1 w zależności od znaku x_k, a średnia zawsze wyniesie 0. □

Jeszcze inaczej: w k rzutach uczciwą monetą parzystą liczbę orłów uzyskamy tak samo często, jak nieparzystą.

Teraz możemy już wykazać, jak z udowodnionego wyżej twierdzenia Huanga wynika zapowiadane w pierwszej części poniższe twierdzenie.

Twierdzenie o czułości. *Dla każdej funkcji boolowskiej f zachodzi nierówność $s(f) \geqslant \sqrt{\deg(f)}$.*

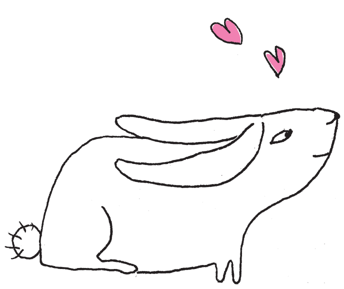
Dowód. Niech $n = \deg(f)$. Jak mówiliśmy wcześniej, wybór liczbowych wartości stałych logicznych nie wpływa na stopień f, więc możemy przyjąć, że wielomian funkcji f, zapisany w konwencji „prawda = 1, fałsz = −1" i zredukowany, nadal ma stopień n, czyli zawiera pewien jednomian $cx_1x_2\ldots x_n$ ze współczynnikiem $c \neq 0$ (bez zmniejszenia ogólności załóżmy, że $c > 0$). Niech teraz

(†) $$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2\ldots x_n \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1, \ldots, 1).$$

Ponieważ $x_1^2 = x_2^2 = \ldots = x_n^2$, to wielomian g ma po redukcji wyraz wolny $c > 0$, więc na mocy faktu 4 ma dodatnią średnią wartość. Znaczy to tyle, że g osiąga na kostce $\{1, -1\}^n$ wartość 1 częściej niż −1, czyli więcej niż 2^{n-1} razy.

Funkcja f może mieć więcej niż n argumentów, wzór (†) mówi jednak, że ignorujemy zmienne inne niż $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nadając im wartość 1.

Na mocy twierdzenia Huanga istnieje więc taki punkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{1, -1\}^n$, że wartość funkcji g wynosi 1 zarówno w nim, jak i w co najmniej $\sqrt{n}$ z jego sąsiadów na kostce. Ale jeśli w sąsiadujących (czyli różniących się jedną współrzędną) wierzchołkach funkcja g ma tę samą wartość, to funkcja f ma wartości przeciwne, bo wyrażenie $x_1x_2\ldots x_n$ zawsze zmienia znak przy przejściu do sąsiada. Zatem funkcja f przyjmuje inną wartość w co najmniej $\sqrt{n}$ sąsiadach x niż w samym x. Z definicji oznacza to, że $s(f, x) \geqslant \sqrt{n}$ i tym bardziej $s(f) \geqslant \sqrt{n} = \sqrt{\deg(f)}$. □



Jest to najlepszy możliwy wynik, gdyż omawiane w pierwszej części zagadnienie urodzin Emila daje dla każdego m przykład funkcji stopnia m^2 o czułości m.