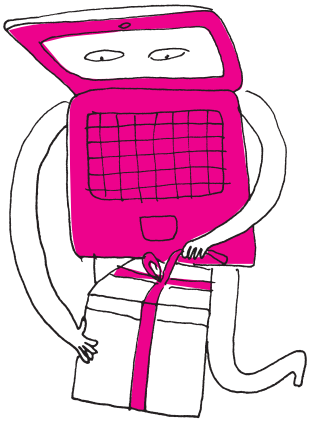
BB84 zgłoś się

Łukasz RAJKOWSKI



Jak można dowiedzieć się z rozlicznych filmów akcji, nieodłączną częścią życia każdego szanującego się tajnego agenta jest wymiana tajnych informacji, najlepiej takich z wielką, czerwoną pieczęcią „Top Secret". Jeśli agent ma taką możliwość, najlepiej przekazać teczkę pełną tajemnic osobiście, jednak jest to luksus, na który może on pozwolić sobie w niewielu sytuacjach, gdyż nierzadko odbiorca tych tajemnic znajduje się na drugim końcu globu. W tej sytuacji konieczne staje się odpowiednie zaszyfrowanie naszych sekretów, aby nawet w przypadku przechwycenia ich przez oślizgłe macki szwarccharakterów, pozostały one sekretami.

Najskuteczniejszym (i najprostszym) sposobem szyfrowania jest *one time pad*, w którym tajny agent (nadamy mu kryptonim B) ustala z odbiorcą swoich wiadomości (nazywanym dalej admirałem M) klucz k, będący pewnym zerojedynkowym ciągiem. Kiedy B chce przesłać M uzyskane sekrety, najpierw konwertuje je w ustalony sposób na zerojedynkowy ciąg m (np. „a" = 00000, „b" = 00001, „c" = 00010 itd.), a następnie wysyła ciąg e (zwany *kryptogramem*), który na i-tej współrzędnej ma resztę z dzielenia przez 2 sumy i-tych współrzędnych ciągów m i k (operacja ta w informatycznej nowomowie nazywana jest *xorem* ciągów m i k i oznaczana przez $m \oplus k$). W ten sposób, jeśli tajna informacja to $m = 10110$, a $k = 10101$, to kryptogramem jest $e = 00011$. Aby odcyfrować otrzymany kryptogram, M wykonuje tę samą operację, która posłużyła B do szyfrowania – oblicza $d = e \oplus k$. Nietrudno sprawdzić, że $d = m$, mamy bowiem $d = e \oplus k = (m \oplus k) \oplus k = m \oplus (k \oplus k) = m$. Ponadto, jeśli e zostanie przechwycone przez wrogie siły (reprezentowane przez nikczemnego doktora N), to nie będą one w stanie wywnioskować stąd m, gdyż byłoby to równoważne z ustaleniem wartości klucza ($k = e \oplus m$), o którym zakładamy przecież, że jest znany tylko B i M. Słabym punktem powyższej procedury jest konieczność spotkania się B i M w celu ustalenia klucza, nie mogą go bowiem przesłać na odległość, gdyż mógłby on zostać „podsłuchany" przez doktora $N\ldots$, a może jednak mogą?

W protokole Diffiego–Hellmana agent B i admirał M ustalają najpierw dużą liczbę pierwszą p oraz niezerową resztę g z dzielenia przez p (i nie boją się , że wartości te zostaną podsłuchane). Następnie każdy z nich wymyśla sobie liczbę naturalną (oznaczmy je odpowiednio przez x i y), po czym B wysyła do M wartość $b = (g^x \bmod p)$, a M odsyła B wartość $m = (g^y \bmod p)$. Wspólnie ustalonym kluczem jest wówczas $k \equiv b^y \equiv m^x \equiv g^{xy} \bmod p$, co (jak na razie) jest trudne do obliczenia wyłącznie na podstawie p, g, b i m.

W 1976 roku Whitfield Diffie i Martin Hellman zaproponowali protokół (znany teraz pod nazwiskami twórców), który pozwala na ustalenie klucza w taki sposób, że nawet jeśli komunikacja zostanie podsłuchana, to strona podsłuchująca nie będzie w stanie odcyfrować prawdziwej wartości klucza. Protokół ten wiąże się z trudnością wykonania tzw. *logarytmu dyskretnego*, czyli odpowiedzi na pytanie w rodzaju „do jakiej potęgi należy podnieść 123, aby otrzymać resztę 321 z dzielenia przez 983?". Jak jednak można dowiedzieć się w tym numerze, w „postkwantowym" świecie z dostępem do wydajnych komputerów kwantowych logarytm dyskretny przestaje być zadaniem trudnym. Na szczęście (dla agenta B) komputery kwantowe dostarczają również nowe narzędzia do kodowania wiadomości i to takie, których w „dowodliwy" sposób same nie mogą przełamać. W tym kontekście podstawową własnością komputerów kwantowych jest fakt, że sprawdzenie stanu ich pamięci często powoduje zmianę tego stanu, co pozwala na wykrycie próby podsłuchania informacji i zerwanie połączenia, a potem poszukiwanie bezpieczniejszego kanału komunikacji. Realizacja tej idei została opisana w 1984 roku przez Charlesa Bennetta i Gillesa Brassarda, a przedstawiony przez nich protokół to tytułowy BB84.

Czytelnikowi Obeznanemu z Algebrą Liniową proponujemy upewnić się, że przedstawione wyobrażenie jednokubitowego komputera kwantowego zgadza się z modelem obliczeń kwantowych, przedstawionym przez Tomasza Kazanę na stronie 2.

Aby wytłumaczyć działanie BB84, zanurzymy się w oparach absurdu i będziemy wyobrażać sobie najprostszy, jednokubitowy komputer kwantowy jako czarną skrzynkę, w której zamknięta jest tarcza zegara wraz ze wskazówką godzinową – godzinę przez nią wskazywaną nazwiemy stanem komputera. W jaki sposób można czegoś się o nim dowiedzieć? Można poprosić komputer o porównanie swojego stanu z konkretną „eLką" – pod tym pojęciem rozumieć będziemy układ dwóch „prostopadłych" godzin, np. 1:30 i 4:30, a ogólnie godzinę h wraz z godziną $h + 3$. Jeśli poprosimy komputer znajdujący się w stanie x o porównanie z eLką (h_1, h_2), to możemy otrzymać dwie odpowiedzi: h_1 z prawdopodobieństwem $\cos^2 \alpha_1$ oraz h_2 z prawdopodobieństwem $\cos^2 \alpha_2$, gdzie α_1, α_2 to kąty, jakie tworzy godzina x odpowiednio z godzinami h_1 i h_2 (prawdopodobieństwa te sumują się do 1, dlaczego?). Ponadto po przedstawieniu odpowiedzi komputer nagina do niej rzeczywistość, to znaczy zmienia swój stan na zgodny z odpowiedzią.

Dla przykładu, jeśli komputer był w stanie 4:30 i poprosiliśmy go o porównanie z eLką (2:30, 5:30), to z prawdopodobieństwem $\cos^2 60^\circ = \frac{1}{4}$

w_i	l_i	s_i	l'_i	s'_i
1	1	↘	0	→
0	0	↑	0	↑
0	1	↗	1	↗
0	1	↗	0	→
1	0	→	1	↘
1	1	↘	1	↘
0	0	↑	0	↑
1	0	→	0	→
0	0	↑	1	↘
0	1	↗	1	↗

Przykładowy przebieg protokołu BB84. Szara czcionka występuje w wierszach, w których B i M użyli różnych eLek. Kolorem zaznaczone zostały wiersze zawierające wyrazy ciągu w upublicznione przez B. Jeśli nie pojawiły się żadne rozbieżności, wspólnym kluczem jest 001.

w_i	l_i	s_i	l_i^N	s_i^N	l'_i	s'_i
1	1	↘	0	↑	0	↑
0	0	↑	1	↘	0	↑
0	1	↗	0	→	1	↗
0	1	↗	1	↗	0	→
1	0	→	0	→	1	↗
1	1	↘	1	↘	1	↘
0	0	↑	1	↘	0	→
1	0	→	0	→	0	→
0	0	↑	1	↗	1	↗
0	**1**	↗	**0**	↑	**1**	↘

Przykładowy przebieg podsłuchiwanego protokołu BB84. W czwartej i piątej kolumnie znajdują się eLki wykorzystywane przez podsłuchującego doktora N oraz stany, w jakich odpowiednie komputery kwantowe znalazły się po niepożądanym odczycie. W ostatnim wierszu wystąpiła rozbieżność między B i M, co dowodzi zaistnienia podsłuchu.

Warto zauważyć, że doktor N mógłby odczytać stany tylko kilku komputerów kwantowych w nadziei, że pozna pewne współrzędne w, a jego podsłuch nie zostanie wykryty. W obronie przed takim zagrożeniem poznane przez M i nieopublikowane przez B wartości w poddawane są *ekstraktorom losowości* – są to specjalne funkcje, dla których znajomość niewielkiej części argumentów nie niesie ze sobą żadnej istotnej informacji o wyniku. Dopiero tak uzyskana wartość jest wykorzystywana przez B i M jako klucz.

otrzymamy odpowiedź 2:30 (i wówczas stan komputera zmieni się na 2:30), a z prawdopodobieństwem $\cos^2 30° = \frac{3}{4}$ usłyszymy 5:30 i taką godzinę zacznie wskazywać wskazówka wewnątrz czarnej skrzynki. Zwróćmy ponadto uwagę, że jeśli stan komputera pokrywa się z jedną z godzin z wybranej przez nas eLki, to na pewno uzyskamy tę godzinę w odpowiedzi, a stan komputera nie ulegnie zmianie. Przejdźmy do opisu protokołu. Wyróżnijmy na początku dwa rodzaje eLek: $L_0 = (0{:}00, 3{:}00)$ i $L_1 = (1{:}30, 4{:}30)$. Agent B zaopatruje się w n jednokubitowych komputerów kwantowych (gdzie n jest raczej duże) i wybiera losowo dwa ciągi zerojedynkowe: $w = (w_1, \ldots, w_n)$ oraz $l = (l_1, \ldots, l_n)$, a następnie stan i-tego komputera ustawia na godzinę s_i będącą $(w_i + 1)$-szą współrzędną eLki L_{l_i}. W ten sposób, jeśli $w_5 = 1$, $l_5 = 0$, to stan piątego komputera zostanie ustawiony na drugą współrzędną L_0, czyli na 3:00. Następnie agent B przesyła pocztą wszystkie komputery do M. Ten ostatni również ustala zerojedynkowy ciąg $l' = (l'_1, \ldots, l'_n)$ i odczytuje stan i-tego komputera przy użyciu eLki $L_{l'_i}$. Później na swojej stronie internetowej (lub innym ogólnodostępnym medium, które tylko on może edytować) udostępnia użyty ciąg l', w odpowiedzi na co agent B publikuje na swojej stronie ciąg l. Zauważmy, że wszędzie tam, gdzie $l_i = l'_i$, admirał M odczytał godzinę zakodowaną przez agenta B, a skoro wie również, jaka eLka posłużyła do jej zakodowania, pozna w_i. Zwróćmy ponadto uwagę, że szansa na to, by $l_i = l'_i$ wynosi 50%, dlatego M powinien poznać około połowy wyrazów ciągu w. Na koniec B upublicznia połowę z tych wyrazów w, które powinien był poznać M. Dlaczego?

Przypomnijmy, że cały ten ambaras miał na celu popsucie szyków nikczemnemu doktorowi N, który przechwycił paczkę z komputerami i postanowił odczytać ich stany. Poprzez odczyt stanu i-tego komputera stwarza on szansę na zmianę tego stanu i tylko w tej sytuacji możliwe jest, aby M, pomimo równości $l_i = l'_i$, odczytał złą wartość w_i. Rozpatrzmy sytuację, w której doktor N użył L_0 do odczytania stanu i-tego komputera, przy czym B i M użyli na tej współrzędnej identyczne eLki (a zatem, gdyby nie podsłuch, M na pewno poznałby wartość w_i). Jeśli B również zakodował wiadomość przy użyciu eLki L_0, to N odczytał pierwotny stan i-tego komputera (w związku z czym również w_i) i go nie zmienił, w związku z czym szpiegostwo pozostanie niewykryte. Jeśli jednak B użył L_1, to N zmienił stan komputera na którąś z godzin 0:00, 3:00 i w każdym z tych przypadków M będzie miał szansę 50% na błędny odczyt w_i. Podsumowując, jeśli doktor N wybrał eLkę L_0 do odczytu stanu i-tego komputera, to z prawdopodobieństwem 25% admirał M odczyta złą wartość w_i.

Okazuje się, że jest tak niezależnie od eLki wybranej przez doktora N (uzasadnienie jest wdzięcznym ćwiczeniem z trygonometrii). Fakt ten tłumaczy ostatnią, „kontrolną” fazę naszego protokołu: jeśli po ujawnieniu przez agenta B połowy wyrazów ciągu w, dla których $l_i = l'_i$, admirał M stwierdzi jakąkolwiek niezgodność ze swoimi odczytami, oznaczać to będzie, że komunikacja została podsłuchana i w związku z tym należy ją powtórzyć, najlepiej przy użyciu bardziej wiarygodnej poczty. Jeśli natomiast wszystkie wartości ujawnione przez B zgadzały się z odczytami M, to prawdopodobieństwo takiego zdarzenia przy założeniu o podsłuchiwaniu kanału wyniosłoby $75\%^{k/2}$ (gdzie $k \approx n/2$ to liczba indeksów i, dla których $l_i = l'_i$), co dla odpowiednio dużych wartości n jest na tyle małe, że można z czystym sumieniem odrzucić hipotezę o podsłuchu i wykorzystać nieujawnione przez agenta B i poprawnie obliczone przez M wartości w_i jako wspólny klucz.

Najwyższy czas opuścić opary absurdu i stawić czoła brutalnej, szpiegowskiej rzeczywistości – przecież żaden tajny agent nie będzie wysyłał pocztą tysiąca jednokubitowych komputerów kwantowych. Pocztą pewnie nie, ale już światłowodem bez problemu! Okazuje się bowiem (za czym stoi fizyczna magia, o której trochę piszemy w tym numerze), że jednokubitowy komputer kwantowy, ta czarna skrzynka z zamkniętym w środku zegarem, to (w rozsądnym uproszczeniu) po prostu foton, a tych przecież nie brakuje i przesyłać przy użyciu światłowodu też je można. Nie jest to jednak tanie – agenci chcący zaopatrzyć się w parę odbiorników oraz odpowiedni światłowód muszą liczyć się z wydatkiem rzędu 100 tysięcy dolarów; czego jednak się nie robi w tajnej służbie Jej Królewskiej Mości...