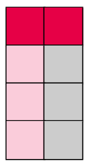
Parkietaże

*Michał ADAMASZEK**

* MOSEK ApS, Kopenhaga

W autorskim tygodniku internetowym *Trapez* [1] Jarosław Wróblewski proponuje serię zadań (nr 75–126) o parkietowaniu prostokątów. Na przykład: czy planszę 15×15 da się szczelnie pokryć klockami o wymiarach 8×1, 1×8, 11×1 oraz 1×11 (oczywiście klocki nie mogą na siebie zachodzić). W tego typu zadaniach odpowiedź zazwyczaj brzmi „nie", a typowa strategia polega na zgadnięciu numeracji lub kolorowania pól planszy i użyciu argumentu w stylu „każdy klocek pokrywa trzy pola zielone, ale liczba pól zielonych na całej planszy jest niepodzielna przez 3". Spróbujmy jednak ogólniej zastanowić się, jak systematycznie, od podstaw, można zaatakować problem: czy planszę o wymiarach $n \times m$ da się wyparkietować klockami ustalonych typów $a_1 \times b_1, \ldots, a_\ell \times b_\ell$.



Przykład parkietażu

Niech (i, j) oznacza pole w i-tym wierszu i j-tej kolumnie. Każde pokrycie planszy możemy zakodować za pomocą zmiennych

$$x_{i,j}^{a\times b} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli pewien klocek typu } a \times b \text{ ma lewy górny róg na polu } (i,j), \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

Na przykład pokrycie planszy 4×2 z rysunku obok opisujemy następująco:

$$x_{1,1}^{1\times 2} = x_{2,1}^{3\times 1} = x_{2,2}^{3\times 1} = 1,$$

a wszystkie inne zmienne $x_{i,j}^{a\times b}$ są równe zero.

Zapytajmy teraz, kiedy zestaw zmiennych $x_{i,j}^{a\times b}$ opisuje poprawny parkietaż. Przede wszystkim musimy usunąć wszystkie zmienne

$$x_{i,j}^{a\times b} \text{ dla } i > n+1-a \text{ lub } j > m+1-b,$$

ponieważ klocek o wymiarach $a \times b$ z lewym górnym rogiem na polu (i, j) wystawałby poza planszę. Po drugie, wszystkie zmienne muszą przyjmować wartości 0 lub 1. W końcu, musimy zagwarantować, że każde pole planszy jest pokryte przez dokładnie jeden klocek. Ten warunek można zapisać następująco:

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i'=\max(1,i-a_k+1)}^{\min(i,n-a_k+1)} \sum_{j'=\max(1,j-b_k+1)}^{\min(j,m-b_k+1)} x_{i',j'}^{a_k\times b_k} = 1$$

dla każdego $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Ten nieprzyjemny wzór oznacza po prostu, że spośród wszystkich legalnych położeń dostępnych klocków, które potencjalnie mogą zahaczać o pole (i, j), dokładnie jedno jest faktycznie w użyciu. A zatem zerojedynkowe rozwiązania układu nm równań liniowych (1) odpowiadają jednoznacznie parkietażom.

Dla zupełnej jasności rozważmy przykład. Zapiszmy w tym języku problem parkietowania planszy 3×4 klockami typu 1×3 i 2×1. Mamy 12 równań, z których każde wymienia legalne sposoby pokrycia jednego z pól:

$$(2) \qquad \begin{array}{ll}
(1,1) & x_{1,1}^{1\times3} + x_{1,1}^{2\times1} = 1 \\
(1,2) & x_{1,1}^{1\times3} + x_{1,2}^{1\times3} + x_{1,2}^{2\times1} = 1 \\
(1,3) & x_{1,1}^{1\times3} + x_{1,2}^{1\times3} + x_{1,3}^{2\times1} = 1 \\
(1,4) & x_{1,2}^{1\times3} + x_{1,4}^{2\times1} = 1 \\
(2,1) & x_{2,1}^{1\times3} + x_{1,1}^{2\times1} + x_{2,1}^{2\times1} = 1 \\
(2,2) & x_{2,1}^{1\times3} + x_{2,2}^{1\times3} + x_{1,2}^{2\times1} + x_{2,2}^{2\times1} = 1 \\
(2,3) & x_{2,1}^{1\times3} + x_{2,2}^{1\times3} + x_{1,3}^{2\times1} + x_{2,3}^{2\times1} = 1 \\
(2,4) & x_{2,2}^{1\times3} + x_{1,4}^{2\times1} + x_{2,4}^{2\times1} = 1 \\
(3,1) & x_{3,1}^{1\times3} + x_{2,1}^{2\times1} = 1 \\
(3,2) & x_{3,1}^{1\times3} + x_{3,2}^{1\times3} + x_{2,2}^{2\times1} = 1 \\
(3,3) & x_{3,1}^{1\times3} + x_{3,2}^{1\times3} + x_{2,3}^{2\times1} = 1 \\
(3,4) & x_{3,2}^{1\times3} + x_{2,4}^{2\times1} = 1
\end{array}$$

Na przykład równanie dla pola $(2, 4)$ czytamy następująco: pole to można przykryć klockiem 1×3 z pola $(2, 2)$ lub klockiem 2×1 z jednego z pól $(1, 4)$ lub $(2, 4)$.

Jak łatwo sprawdzić, prostokąta 3×4 klockami 1×3 i 2×1 pokryć się nie da. Możemy tego faktu dowieść algebraicznie, mianowicie mnożąc równania (2)

Rozwiązanie zadania M 1593.
Skoro $2n-1$ jest liczbą złożoną, to $2n-1 = pq$ dla pewnych (niekoniecznie różnych) liczb nieparzystych p, q większych od 1. Niech

$$a_i = 1 \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, p$$

oraz

$$a_i = 2i - 1 - p \text{ dla } i = p+1, p+2, \ldots, n.$$

Wówczas $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Jeżeli $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$, to

$$\frac{a_i + a_j}{\mathrm{NWD}(a_i, a_j)} \leqslant a_i + a_j = i + j \leqslant \leqslant 2p < pq = 2n - 1.$$

Jeżeli $p + 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, to $2 \mid \mathrm{NWD}(a_i, a_j)$, skąd

$$\frac{a_i + a_j}{\mathrm{NWD}(a_i, a_j)} \leqslant \frac{a_i + a_j}{2} = i + j - 1 - p \leqslant \leqslant 2n - 1 - p < 2n - 1.$$

Jeżeli $1 \leqslant i \leqslant p$, $p + 1 \leqslant j \leqslant n$ oraz $(i, j) \neq (p, n)$, to

$$\frac{a_i + a_j}{\mathrm{NWD}(a_i, a_j)} \leqslant a_i + a_j = = i + 2j - 1 - p < < 2n - 1.$$

W końcu jeśli $(i, j) = (p, n)$, to

$$\frac{a_i + a_j}{\mathrm{NWD}(a_i, a_j)} = \frac{pq}{q} = p < 2n - 1.$$

kolejno przez następujące współczynniki:

$$-1, 1, 0, -1, 1, -1, 0, 1, -1, 1, 0, -1 \tag{3}$$

i dodając wszystko stronami. Wtedy otrzymamy

$$0 = -1,$$

co dowodzi, że układ (2) nie ma rozwiązań rzeczywistych (a więc tym bardziej zerojedynkowych!).

Uogólnijmy ostatnie rozumowanie. Układ równań liniowych nie ma rozwiązań w liczbach rzeczywistych jedynie wówczas, gdy pewna kombinacja liniowa danych równań daje „oczywistą sprzeczność” postaci „zero z lewej, coś niezerowego z prawej strony”. Nie udowodnimy tego faktu, a jedynie odwołamy się do intuicji i życiowego doświadczenia Czytelników w tym zakresie.

Co to znaczy w szczególnym przypadku układu (1)? Oznaczmy przez y_{ij} współczynnik, przez jaki w naszym dowodzie nierozwiązywalności przemnożymy równanie dla pola (i, j). Możemy nawet myśleć o tych współczynnikach jako wpisanych w pola planszy: y_{ij} umieszczamy na polu (i, j). Na przykład współczynniki (3) dla przykładu (2) pojawią się na planszy 3×4 w następującej kolejności:

-1	1	0	-1
1	-1	0	1
-1	1	0	-1

Wtedy (proszę sprawdzić) „oczywista sprzeczność” dla układu (1) polega na tym, że:

- każde dopuszczalne położenie klocka na planszy pokrywa pola o sumie y_{ij} równej zeru,
- suma wszystkich y_{ij} jest niezerowa.

Jest zupełnie Jasne (przez duże J, i to bez lektury całego naszego wywodu), że powyższe warunki dowodzą nieistnienia parkietażu! A zatem odkryliśmy od podstaw jeden z wariantów magicznej metody rozwiązywania tego typu zadań, wspomnianej na początku.

Spójrzmy na to, co tutaj się stało, z jeszcze szerszej perspektywy. Układ równań taki jak (1) jest bardzo szczególnym przypadkiem problemu z zakresu *programowania całkowitoliczbowego* (ang. mixed-integer programming). Wiele trudnych problemów kombinatorycznych można zakodować w tej postaci, wprowadzając zmienne zerojedynkowe opisujące pewne zdarzenia (np. klocek leży na polu) i wyrażając wzajemne ograniczenia (np. klocki nie zachodzą na siebie) w postaci równań i nierówności liniowych, tak jak w (1). Jest to standardowa technika dla wielu tego typu problemów. Rozwiązywanie problemów całkowitoliczbowych, choć możliwe, jest bardzo czasochłonne (w istocie NP-trudne), dlatego możemy na początek zapytać, czy badany problem ma w ogóle rozwiązanie w liczbach rzeczywistych. Ten proces nazywa się *relaksacją*. Powstały problem liniowy można rozwiązać efektywnie, a jeżeli okaże się, że rozwiązania nie ma, to zawsze można podać *certyfikat niespełnialności* (ang. infeasibility certificate), analogiczny do naszej tabeli współczynników y_{ij}. Czytelnikom zainteresowanym tym Olbrzymim (przez duże O) działem optymalizacji proponuję wpisanie wymienionych tu haseł w wyszukiwarce.

Reasumując:

dowód nieistnienia parkietażu przez kolorowanie/numerowanie i inne sprytne niezmienniki

to nic innego, jak

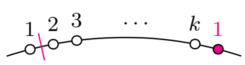
certyfikat niespełnialności dla liniowej relaksacji całkowitoliczbowego modelu parkietowania.

Pod adresem [2] można znaleźć kod źródłowy wraz z komentarzami, pozwalający własnoręcznie eksperymentować z parkietażami przy użyciu ogólnodostępnych pakietów do modelowania i programowania liniowego/całkowitoliczbowego. Można tam znaleźć rozwiązanie zadania o planszy 15×15 ze wstępu.

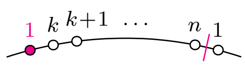
Rozwiązanie zadania M 1591. Spośród wszystkich par wyróżnionych punktów o tym samym numerze wybierzmy taką, że między nimi jest jak najmniej innych wyróżnionych punktów (na pewnym z dwóch łuków). Bez straty ogólności przyjmijmy, że wybrana para ma numery 1 (cykliczne przenumerowanie jednocześnie w obrębie punktów obydwu kolorów nie ma wpływu na tezę).

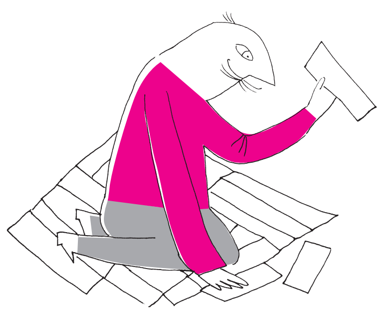
Zauważmy, że wszystkie wyróżnione punkty pomiędzy tymi o numerze 1 są tego samego koloru — w przeciwnym przypadku wśród nich byłyby punkty o tym samym numerze. Przypuśćmy, że są to punkty białe; rozumowanie w przypadku punktów czarnych jest analogiczne. W zależności od położenia punktów o numerze 1 możemy wyróżnić dwa przypadki.

1° Pomiędzy punktami o numerze 1 znajdują się punkty białe o numerach od 2 do k. Wówczas wybierając jeden punkt podziału okręgu na łuki pomiędzy białymi punktami o numerach 1 i 2, a drugi — w taki sposób, aby na obydwu uzyskanych łukach było po n wyróżnionych punktów, uzyskujemy rozcięcie o postulowanej własności.



2° Pomiędzy punktami o numerze 1 znajdują się punkty białe o numerach od k do n. Wówczas wybierając jeden punkt podziału okręgu na łuki pomiędzy białymi punktami o numerach 1 i n (a drugi odpowiednio jak wyżej), uzyskujemy rozcięcie spełniające warunki zadania.





Literatura

[1] www.math.uni.wroc.pl/~jwr/trapez

[2] github.com/aszek/Delta