

Problem więźniów – o pewnych własnościach losowych permutacji

Joanna JASIŃSKA*

* Studentka, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rozwiązanie zadania F 996.

W zewnętrznym zjawisku fotoelektrycznym energia padających kwantów światła hc/λ i maksymalna energia kinetyczna elektronów wybijanych z katody E_k spełniają związek:

$$\frac{hc}{\lambda} = E_k + W.$$

Przyłożenie do elektrod fotokomórki napięcia U_h , do którego pokonania nie wystarczy maksymalna energia kinetyczna uzyskiwana przez elektrony, całkowicie wygasza prąd przez fotokomórkę. Mamy więc:

$$eU_h = \frac{hc}{\lambda} - W, \quad \text{czyli} \quad U_h = \frac{hc}{\lambda e} - \frac{W}{e}.$$

Jeśli napięcie przyspieszające elektrony w kierunku anody jest wystarczająco duże, to wszystkie elektrony wybite z katody docierają do anody i wtedy przez fotokomórkę płynie prąd nasycenia (dalsze zwiększanie napięcia nie zwiększa prądu). Odpowiada to sytuacji, kiedy każdy padający foton wybija jeden elektron, który dociera do anody. Prąd nasycenia wynosi więc:

$$I_n = \frac{eS\lambda}{hc}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy (odpowiednio dla λ_1 i λ_2):

$$U_{h1} = 0,53 \text{ V}, \quad U_{h2} = 2,2 \text{ V}$$

oraz

$$I_{n1} = 0,40 \text{ A}, \quad I_{n2} = 0,24 \text{ A}.$$

Cyklem długości k w permutacji σ nazywamy ciąg elementów a_1, \dots, a_k takich, że $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ dla $i < k$ oraz $\sigma(a_k) = a_1$.

W pewnym zakładzie karnym przebywa stu skazanych, ponumerowanych liczbami od 1 do 100: B_1, B_2, \dots, B_{100} . Strażnik zaproponował im następującą grę: sto kartek z ich numerami umieszcza w stu skrytkach, po jednej kartce w każdej skrytce. Sposób rozmieszczenia kartek nie jest znany więźniom. Następnie strażnik pozwala każdemu z więźniów sprawdzić dokładnie połowę skrytek. Sprawdzający wchodzi do pokoju ze skrytkami sam, a po swojej turze musi zostawić pokój w stanie nienaruszonym i jedynie poinformować nadzorcę, czy odnalazł swój numer, czy też nie. Nie komunikuje się później z pozostałymi więźniami. Osadzeni wygrywają wyjście na wolność wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z nich zdoła odnaleźć swój numer. Jaka jest szansa na to, że im się to uda? Na pierwszy rzut oka więźniowie są w dramatycznej sytuacji. Każdy z nich ma szansę 50% na odnalezienie numeru w swojej turze, więc wydawać by się mogło, że szansa na sukces wszystkich wynosi $(0,5)^{100}$, czyli przeraźliwie mało. Okazuje się, że ta intuicja jest błędna. Opowiem o strategii pozwalającej na zmaksymalizowanie prawdopodobieństwa wygranej w opisaną grę – dzięki niej szansa więźniów na uzyskanie wolności wynosi... ponad 30%!

Wspomniana strategia jest następująca: więzień B_i swoją turę rozpoczyna od sprawdzenia i -tej szafki. Jeśli nie znajdzie tam swojego numeru, tj. znajdzie numer $k \neq i$, to sprawdza k -tą szafkę. Postępuje w ten sposób aż do momentu sukcesu lub wyczerpania się puli szafek możliwych do sprawdzenia. Dla przykładu, ograniczmy się do przypadku 10 więźniów, żeby z łatwością prześledzić przebieg rozgrywki. Załóżmy, że w szafkach znajdują się kolejno numery: 3, 2, 8, 5, 9, 4, 6, 10, 7, 1. Rozgrywka więźnia B_1 krok po kroku przedstawia się następująco:

Sprawdza szafkę 1. → Znajduje w niej 3 → Sprawdza szafkę 3. → Znajduje w niej 8 → Sprawdza szafkę 8. → Znajduje w niej 10 → Sprawdza szafkę 10. → Znajduje w niej 1 → Zwycięsko kończy swoją turę.

Zauważmy, że w momencie znalezienia swojego numeru (czyli po czterech sprawdzeniach) więzień B_1 już wie, że więźniowie B_3, B_8, B_{10} będą sprawdzać dokładnie te same szafki co on, w pewnym cyklicznym przesunięciu, i każdy z nich odniesie sukces w czwartym kroku. Sukcesy więźniów nie są zatem, przy zastosowaniu tej strategii, zdarzeniami niezależnymi, a więc – chociaż wciąż każdy z nich ma szansę 50% na znalezienie swojego numerka – szansa na sukces wszystkich więźniów nie musi być tak mała, jak podpowiadała opisana na wstępie intuicja. A ile ta szansa wynosi dokładnie? Aby odpowiedzieć na to pytanie, musimy odrobinę sformalizować naszą grę.

Gdy spojrzymy na tę zagadkę jak na problem matematyczny, rozmieszczanie przez strażnika numerów więźniów w szafkach ponumerowanych od 1 do 100 odpowiada losowaniu przez niego pewnej permutacji σ zbioru $\{1, \dots, 100\}$. Zgodnie z opisaną strategią i -ty więzień rozpocznie od sprawdzenia i -tej szafki, w której znajdzie numerka $\sigma(i)$. Jeśli $\sigma(i) \neq i$, to więzień kontynuuje i otwiera szafkę o numerze $\sigma(i)$, w której znajduje $\sigma(\sigma(i)) =: \sigma^2(i)$. O ile wcześniej nie znalazł swojego numerka, w k -tym podejściu otworzy szafkę $\sigma^{k-1}(i)$ i znajdzie tam numer $\sigma^k(i)$. W tej sytuacji i -ty więzień odnajdzie swój numer, jeśli liczba i jest elementem cyklu długości nie większej niż 50. Zatem sukces więźniów jest równoważny temu, że w permutacji σ nie ma cyklu długości większej niż 50. Szansa na ich porażkę to zatem szansa na wystąpienie takiego cyklu w losowej permutacji liczb $1, 2, \dots, 100$.

Obliczanie prawdopodobieństwa przegranej przy opisaną strategii sprowadza się więc do znalezienia liczby permutacji zbioru 100-elementowego, które mają cykl długości 51 lub dłuższy. W ogólności sprawę wyjaśnia następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Liczba permutacji zbioru n -elementowego, które zawierają cykl długości $k > \frac{n}{2}$, wynosi $\frac{n!}{k}$.

**Rozwiązanie zadania M 1630.**

Załóżmy, że liczby $x < y$ spełniają $\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Równanie to można sprowadzić do postaci

$$(2x - p)(2y - p) = p^2.$$

Ponieważ p jest liczbą pierwszą, wynika stąd, że $2x - p = p$ lub $2x - p = 1$. Pierwsza z tych możliwości oznaczałaby, że $x = p = y$, co przeczy zależności $x < y$. Musi być zatem $x = \frac{p+1}{2}$, skąd

$y = \frac{p(p+1)}{2}$; ponieważ $p > 2$, liczby te są całkowite i faktycznie spełniają wymaganą równość.

Dowód. Zwróćmy uwagę, że permutacja może mieć co najwyżej jeden cykl długości większej niż $\frac{n}{2}$. Wybieramy na $\binom{n}{k}$ sposobów, które k elementy mają wejść w skład cyklu k -elementowego. Ustawiamy je na $k!$ sposobów. Cykl nie zmienia się przy przesunięciach – możliwych przesunąć w prawo reprezentacji cyklu jako (a_1, \dots, a_k) jest dokładnie k . Liczba możliwych istotnie różnych ustawień wybranych k elementów to zatem $\frac{k!}{k} = (k-1)!$. Pozostałe $n - k$ elementy permutujemy na $(n - k)!$ sposobów. Liczba permutacji zbioru n -elementowego, które w swoim rozkładzie zawierają cykl długości $k > \frac{n}{2}$, to w takim razie: $\binom{n}{k} \cdot (k-1)! \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k}$. □

Zgodnie z powyższym twierdzeniem dla $k = 51, 52, \dots, 100$ cykle długości k stanowią $\frac{1}{k}$ wszystkich permutacji. Prawdopodobieństwo otrzymania permutacji posiadającej cykl długości 51 lub dłuższy jest wobec tego równe:

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{99} + \dots + \frac{1}{51} \approx 0,688.$$

Szansa więźniów na wygraną wynosi więc w przybliżeniu $1 - 0,688 = 0,312$, czyli w ponad 30% przypadków więźniowie wyjdą na wolność.

Dygresja dla Czytelników-Analityków. Nasuwa się pytanie, czy istnieje dodatnie ograniczenie dolne szansy na wygraną, niezależnie od liczby więźniów. Odpowiedź na nie jest twierdząca. Rozważmy sytuację, w której jest $2n$ więźniów. Skazańcy wygrywają, gdy permutacja zbioru $A = \{1, \dots, 2n\}$, czyli ułożenie w szafkach ich numerów, nie będzie zawierała cyklu długości większej lub równej $n + 1$. Prawdopodobieństwo wystąpienia takiego cyklu wynosi

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

Z łatwością można zauważyć, że jest to górna suma riemannowska dla całki $\int_n^{2n} \frac{1}{x+1} dx$ i dolna suma riemannowska dla całki $\int_n^{2n} \frac{1}{x} dx$. Obliczając każdą z tych całek, otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$\ln \left(2 - \frac{1}{n+1} \right) = \int_n^{2n} \frac{1}{x+1} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx = \ln 2.$$

Przechodząc z n do nieskończoności i korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, obliczamy granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2$. Co więcej, ciąg $(b_n)_{n=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ jest rosnący, co Wnikliwy Czytelnik zechce samodzielnie wykazać, uzasadniając, że dla każdego $b_{n+1} - b_n > 0$. W takim razie ciąg $(1 - b_n)_{n=1}^{\infty}$ maleje do granicy, jaką jest

$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 - \ln 2 \approx 0,307.$$

Na podstawie tych rachunków wiemy, że niezależnie od tego, ilu skazanych podjęło się gry, ich szanse na zwycięstwo przy opisanej strategii nie będą mniejsze niż 30%.

Pozostaje uzasadnić, dlaczego jest to najlepsza możliwa strategia. Nie jest zaskakujące, że dowód optymalności będzie bardziej skomplikowany, jest jednak wielce pouczający! Dla uproszczenia będziemy znów rozważać przypadek z dziesięcioma więźniami, $n = 10$. Rozważmy subtelną zmianę reguł gry: tym razem każdy z więźniów musi otwierać szafki do momentu, w którym znajdzie swój numer. Nie ma ograniczeń co do liczby sprawdzeń, jednak więźniowie przegrywają, gdy na końcu okaże się, że któryś z nich otworzył ponad połowę szafek. Taka zmiana nie wpływa na prawdopodobieństwo zwycięstwa w rozważanej przez nas grze, którą dalej będziemy nazywać **grą A**.

Opiszemy teraz zasady nieco innej gry, nazywanej przez nas dalej **grą B**. Tym razem strażnik zaprasza wszystkich więźniów jednocześnie do pokoju z szafkami, tak że mogą oni obserwować przebieg rozgrywki. Założmy, że rozmieścił on numery w kolejności: 2, 5, 10, 3, 9, 4, 6, 8, 1, 7. Więzień B_1 rozpoczyna sprawdzanie. Szuka do momentu, w którym znajdzie swój numer, przy czym nie zamyka już otwartych szafek. Inni gracze widzą, jakie numery zostały już znalezione. Ponadto jeśli B_1 odnajdzie (postępując według jakiejś swojej strategii) kolejno numery 4, 7, 2, 1, to B_4 , B_7 i B_2 już nie startują w grze, ich numery zostały odnalezione. Kolejnym sprawdzającym będzie teraz więzień o najmniejszym numerze, który nie został znaleziony w poprzedniej turze, czyli B_3 . Odnajduje on numery 9, 5, 10, 6, 3. Pozostały gracz B_8 w jednym kroku odnajduje swój numer. Na końcu sprawdzamy, czy któryś z graczy otworzył więcej niż 5 szafek. Tym razem więźniom udało się wygrać.

Jest jasne, że gra B jest dla więźniów korzystniejsza niż gra A . Oznacza to w szczególności, że najlepsza możliwa strategia w grze A daje nie większą szansę na sukces niż najlepsza możliwa strategia w grze B . Pokażemy, że każda strategia

**Rozwiązanie zadania M 1632.**

Niech $f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - x|$. Ponieważ $0 \leq x_i \leq 1$, więc

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - x_i) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \\ &= 1 - f(0). \end{aligned}$$

W tej sytuacji $f(0) \leq \frac{1}{2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(1) \geq \frac{1}{2}$. Teza wynika zatem z ciągłości funkcji f i własności Darboux funkcji ciągłych.

Rozwiązanie ćwiczenia z artykułu

O trójkątach (nie tylko) na sferze:

Pokażemy liniowość ∂_1 , ale uzasadnienie dla ∂_2 przebiega analogicznie. Ustalmy dwa podzbiory krawędzi $X, Y \subseteq \mathcal{E}$ oraz wierzchołek $v \in V$. Jeśli na chwilę ograniczymy się jedynie do krawędzi kończących się w v , to liczba krawędzi z $X \div Y$ ma tę samą parzystość co suma liczby krawędzi z X i liczby krawędzi z Y . Aby ta ostatnia suma była nieparzysta, dokładnie jeden ze składników musi być nieparzysty, a drugi parzysty. Innymi słowy, $v \in \partial_1(X \div Y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy v należy do dokładnie jednego ze zbiorów $\partial_1(X)$ i $\partial_1(Y)$. W języku różnicy symetrycznej oznacza to dokładnie równość $\partial_1(X \div Y) = \partial_1(X) \div \partial_1(Y)$.

Dlaczego dla $k > 5$ mamy $\frac{10!}{k}$ permutacji z blokiem długości k ? Taki blok może być co najwyżej jeden. Najpierw na $\binom{10}{k}$ sposobów wybieramy k elementów, które mają być częścią bloku. Najmniejszy z nich m musi znaleźć się na końcu, a pozostałe możemy ustawić na $(k-1)!$ sposobów. Elementy spoza bloku możemy ustawić na $(10-k)!$ sposobów i dla każdego z nich w dokładnie jednym miejscu możemy ustawić wyróżniony blok, tzn. tuż po tym, jak pojawią się wszystkie elementy od 1 do $m-1$.



Rozwiązanie zadania F 995.

Długość fali de Broglie'a cząstki spełnia równość $\lambda = h/p$, gdzie p jest pędem cząstki. Energie kinetyczne elektronów w rozważanych procesach są małe w porównaniu z energią spoczynkową elektronu ($m_e c^2 \approx 511 \text{ keV}$), możemy więc użyć klasycznego związku pędu i energii kinetycznej cząstki. Energia kinetyczna uzyskana przez elektron przyspieszany napięciem U wynosi:

$$eU = \frac{p^2}{2m_e}.$$

Po podstawieniu $p = h/\lambda$ otrzymujemy:

$$U = \frac{h^2}{2e\lambda^2 m_e} \approx 540 \text{ V},$$

czyli napięcie uzyskiwane przez połączenie szeregowo 60 baterijek 9 V.

w grze B daje prawdopodobieństwo sukcesu takie, jak opisana wcześniej strategia dla gry A , co będzie dowodzić optymalności tej ostatniej.

Powróćmy do rozważanego wcześniej przykładu rozgrywki w grę B . Powiedzmy, że każdy z wykonujących ruchy graczy zapisywał numery kolejno otwieranych szafek w jednym ciągu. Tutaj dałoby to ciąg $\tau = (4, 7, 2, 1, 9, 5, 10, 6, 3, 8)$. Uzyskany ciąg jest pewną permutacją zbioru liczb od 1 do 10, potencjalnie dowolną. Ponadto można z niego wywnioskować „bloki” numerów odkrywanych przez kolejnych graczy: każdy blok ma kończyć się najmniejszym „jeszcze niezblokowanym” numerem (4, 7, 2, 1 wraz z 9, 5, 10, 6, 3 oraz 8 to trzy bloki). Więźniowie wygrywają grę B , jeśli uzyskana permutacja τ nie ma bloku długości większej niż 5.

Kluczowym spostrzeżeniem jest teraz to, że jeśli każda z permutacji σ rozmieszczenia kartek w szafkach była wylosowana z tym samym prawdopodobieństwem, to w wyniku każda z permutacji τ również będzie uzyskana z tym samym prawdopodobieństwem. Dokładne wyjaśnienie tego faktu nie jest długie, jednak mało interesujące i mogłoby się zdawać „przeformalizowane”, zamiast tego przedstawimy zatem przekonującą intuicję.

Prawdopodobieństwo pojawienia się danego uporządkowania numerków w szafkach wynosi $\frac{1}{10!}$. Niezależnie od tego, którą szafkę postanowi jako pierwszą sprawdzić B_1 , prawdopodobieństwo wystąpienia w niej na przykład 9 wynosi $\frac{1}{10}$. Pod warunkiem, że owa dziewiątka zostanie odszukana jako pierwsza, prawdopodobieństwo odszukania na przykład 1 w drugim kroku jest równe $\frac{1}{9}$ (ze względu na „symetrię” wyjściowego losowania σ). W tym wypadku nie ma żadnego znaczenia, jaką strategią posłużą się więźniowie, gdyż z punktu widzenia ich decyzji każdy z nieodkrytych jeszcze numerków pełni tę samą rolę. Powtarzając to rozumowanie, dochodzimy do wniosku, że każda wynikowa permutacja τ może zostać uzyskana z tym samym prawdopodobieństwem $\frac{1}{10!}$.

Prawdopodobieństwo przegranej jest zatem dla każdej strategii takie samo – jest to prawdopodobieństwo, że losowo wybrana permutacja ma blok dłuższy niż 5. W ilu przypadkach z 10! możliwych więźniowie przegrają? Otóż dokładnie w ten sam sposób, jak udowodniliśmy twierdzenie, możemy pokazać, że permutacji, które mają blok długości $k > 5$, jest dokładnie $\frac{10!}{k}$ – szczegóły na marginesie.

W tej sytuacji więźniowie wygrywają grę B z prawdopodobieństwem równym $1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) = \frac{893}{2520} \approx 0,354$. Prawdopodobieństwo zwycięstwa w grze B jest równe prawdopodobieństwu sukcesu w grze A , w której wykorzystano strategię poruszania się po cyklach.

Więźniowie mogą zaadaptować dowolną strategię z gry A do gry B . Przy ustalonym ustawieniu numerów w szafkach, jeśli dana strategia poprowadziła do zwycięskiej kolejności otwierania w grze A , to ta kolejność będzie również zwycięska w grze B . W takim razie, gdyby istniała lepsza strategia dla gry A , niż przechodzenie przez cykle, to po zaadaptowaniu do gry B musiałaby również dawać w niej większe szanse na zwycięstwo. Jednakże nie jest to możliwe, ponieważ wszystkie strategie w grze B prowadzą do takich szans na zwycięstwo, jak przechodzenie przez cykle. Jest to zatem strategia optymalna.

Udało nam się rozwikłać problem więźniów – wskazaliśmy najlepszą możliwą strategię. Zagadnienie to ma jednak tę własność, że generuje dużą liczbę pytań, które można sobie zadać, kiedy już pozna się jego rozwiązanie. Co się stanie, gdy szafek będzie dwukrotnie więcej niż więźniów i połowa z nich będzie pusta? Wtedy oczywiście strategia przechodzenia przez cykle nie działa, bo można natrafić na pustą szafkę. Czy w takim wariacie można stwierdzić, że razem ze zwiększającą się liczbą graczy, prawdopodobieństwo ich wygranej będzie zmniejszać się aż do 0? Okazuje się, że wciąż jest to problem otwarty. Można również zadać pytanie, co się stanie, jeśli strażnik więzienia byłby niezwykle dociekliwym Czytelnikiem *Delty* i przewidział, że więźniowie będą postępować zgodnie ze strategią przechodzenia przez cykle. Wtedy mógłby ustawić numery specjalnie w taki sposób, by pojawił się cykl o długości większej niż połowa liczby szafek. Zagadką dla Czytelnika równie dociekliwego, co ów strażnik, pozostaje znalezienie sposobu, w jaki więźniowie mogliby poradzić sobie wówczas z pilnującym ich matematykiem.