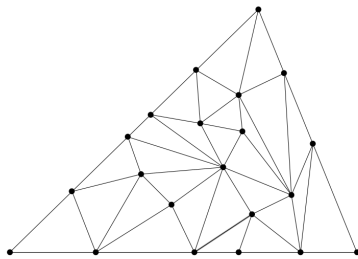


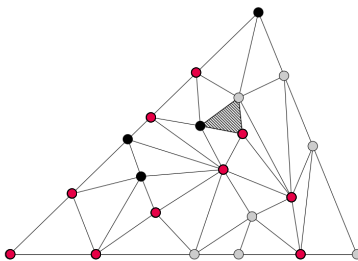
Lemat Spernera, czyli co wspólnego mają trójkąty i sprawiedliwy podział

Jakub SZULC*

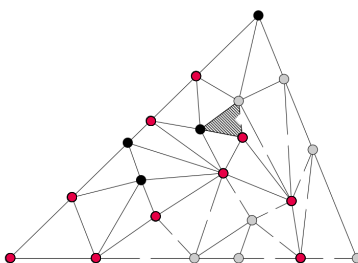
*Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 1. Triangulacja trójkąta



Rys. 2



Rys. 3

Poprzez *triangulację* będziemy rozumieć podział figury na trójkąty (rys. 1). W dalszej części artykułu będziemy zajmować się kolorowaniem wierzchołków triangulacji pewnego trójkąta. Wyjściowy trójkąt będziemy nazywali *dużym*, natomiast „jednostkowe” trójkąty triangulacji będziemy nazywać *małymi*. Kluczowym elementem tych rozważań będzie następujący lemat:

Lemat (Sperner). *Weźmy dowolną triangulację trójkąta i pokolorujmy każdy wierzchołek na czarno, szaro lub pomarańczowo, zachowując dwa warunki:*

- *duży trójkąt jest różnokolorowy (to znaczy, że jego wierzchołki są pokolorowane parami różnymi kolorami),*
- *na żadnym boku dużego trójkąta nie mogą występować wszystkie trzy kolory.*

Wtedy istnieje różnokolorowy mały trójkąt (rys. 2).

Dowód. Załóżmy, że nie ma takiego małego trójkąta. Poprzez *drzwi* będziemy rozumieli każdą krawędź między pomarańczowym a szarym wierzchołkiem (na rysunku 3 oznaczone przerywanym odcinkiem). W dalszej części dowodu będziemy myśleli o małych trójkątach jako o pokojach, między którymi będziemy chodzić. Zauważmy, że wszystkie drzwi na bokach dużego trójkąta mogą być tylko na jednym boku (powiedzmy, że jest to „dolny” bok, tak jak na rys. 3). Co więcej, na tym boku jest ich nieparzysta wiele.

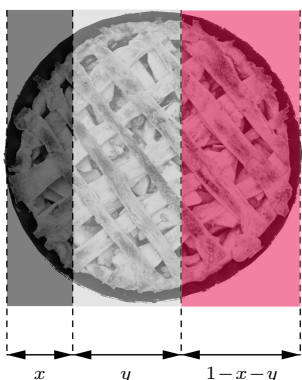
Sprawdźmy, ile drzwi może znajdować się w pokojach. Łatwo zauważyć, że żaden pokój nie może mieć dokładnie trojga. Jedne drzwi mógłby mieć tylko w wypadku, gdyby był różnokolorowy (a założyliśmy, że takiego nie ma). Wszystkie pokoje mają zatem albo 0 albo 2 drzwi.

Możemy teraz zacząć chodzić po pokojach. Każdych drzwi będziemy używać co najwyżej raz. Najpierw „wejdziemy” do dużego trójkąta przez któreś z drzwi na jego dolnym boku i będziemy chodzić do momentu, gdy „wyjdziemy” z dużego trójkąta przez jakieś drzwi na jego dolnym boku. Fakt, że każdy pokój ma albo 0, albo 2 drzwi, gwarantuje nam, że z każdego pokoju, do którego wejdziemy, możemy też wyjść, a ponadto nigdy dwukrotnie nie wejdziemy do tego samego pokoju. Całą procedurę powtarzamy, aż wyczerpiemy drzwi na dolnym boku dużego trójkąta. Z drugiej strony oznacza to, że drzwi na tym boku jest parzysta liczba, a otrzymujemy sprzeczność. □

Zauważmy, że jest to tak naprawdę dowód konstrukcyjny i przedstawia on algorytm na znalezienie takiego trójkąta. Chcąc znaleźć różnokolorowy pokój, chodzimy do momentu, aż utknijemy. Zwróćmy również uwagę, że z powyższego dowodu wynika, iż różnokolorowych małych trójkątów jest nieparzysta liczba. Wynika stąd, że lemat Spernera działa dla większej liczby wymiarów i kolorów. Dowód przebiega w podobny sposób przy użyciu indukcji. Fakt, że liczba drzwi na dolnej ścianie sympleksu (czyli wielowymiarowego trójkąta) jest nieparzysta, to w rzeczywistości „poprzednio-wymiarowa” wersja lematu Spernera.

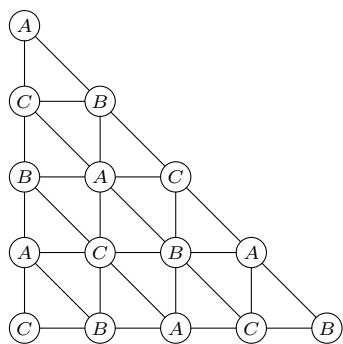
Problem 1. *Aldona, Bogumił i Celina chcą podzielić między siebie ciasto. Jak to zrobić, żeby nikt nikomu nie zazdrościł? Każdy może mieć różne preferencje co do tego, która część ciasta jest najlepsza.*

Rozwiązanie. Ustalmy dowolnie pewien kierunek i załóżmy, że w tym kierunku ciasto ma szerokość 1. Będziemy ciąć prostokątne ciasto prostopadłe do tego kierunku. Możemy wtedy przedstawić każde takie cięcie jako parę (x, y) , gdzie $x + y \leq 1$ i kawałki będą mieć odpowiednio szerokości $x, y, 1 - x - y$. Kawałki nazwiemy odpowiednio czarny, szary i pomarańczowy (rys. 4).



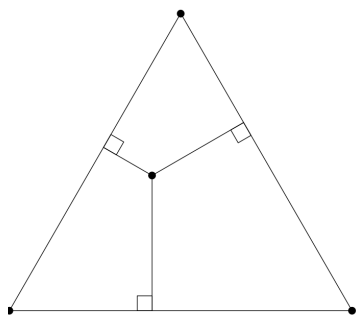
Rys. 4

Zbiór wszystkich takich par (x, y) tworzy trójkąt o wierzchołkach $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$. Potnijmy go na bardzo dużo mniejszych trójkątów. Oznaczmy wierzchołki literami



Rys. 5

Dociekliwy Czytelnik może nie być usatysfakcjonowany podanym rozwiązaniem problemu 1. Znaleźliśmy bardzo dobry podział ciasta, a nie idealny, i ktoś nadal może być delikatnie niezadowolony. Chcąc znaleźć idealny podział ciasta, możemy wziąć coraz lepszych podziałów. Wśród nich, na mocy twierdzenia Bolzano–Weierstrassa, istnieje podciąg zbieżny. Granica tego podciągu wyznacza nam idealny podział ciasta.



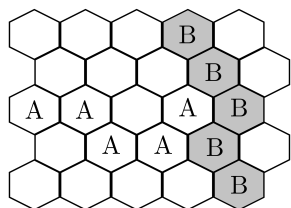
Rys. 6

A, B, C tak, że w każdym małym trójkącie wśród oznaczeń wierzchołków będą wszystkie litery (tak jak na rys. 5). Następnie dla każdego wierzchołka (x, y) pytamy odpowiadającą mu osobę (Aldonę, Bogumiłą lub Celinę), który kawałek by wybrał, gdyby właśnie taki podział ciasta miał miejsce. W ten sposób kolorujemy wierzchołki na czarno, szaro lub pomarańczowo. Łatwo sprawdzić, że ten podział wierzchołków spełnia warunki lematu Spernera. W końcu na krawędziach dużego trójkąta któryś kawałek jest pusty, a nikt nie wybierze pustego kawałka! W szczególności w wierzchołkach dużego trójkąta niepusty będzie tylko jeden kawałek, w każdym inny. Zatem istnieje różnokolorowy mały trójkąt. Oznacza to, że istnieją trzy bardzo podobne podziały ciasta, w których każdy woli inny kawałek. Możemy więc wziąć np. średnią z nich (środek ciężkości małego trójkąta) i podzielić kawałki zgodnie z preferencjami. Mogliśmy wziąć dowolnie drobną triangulację, więc różnice między kawałkami będą minimalne. \square

Problem 2. *Aldona, Bogumił i Celina chcą razem wynająć trzypokojowe mieszkanie. Czynsz za całe mieszkanie wynosi 3000 złotych. Jak podzielić między nich pokoje i czynsz tak, żeby nikt nikomu nie zazdrościł?*

Rozwiązanie. Skorzystamy ze znanej własności trójkąta równobocznego, takiej że dla każdego punktu wewnątrz tego trójkąta suma $x + y + z$ jest stała (rys. 6). Weźmy zatem „regularną” triangulację (rys. 6) i powiedzmy, że dla każdego punktu (x, y, z) zachodzi $x + y + z = 6000$. Dalej postępujemy analogicznie do poprzedniego zadania: oznaczmy wierzchołki literami A, B, C podobnie jak na rysunku 5, tylko że dla trójkąta równobocznego. Następnie dla każdego wierzchołka (x, y, z) pytamy odpowiadającą mu osobę, który pokój by wybrała, gdyby ceny czarnego, szarego i pomarańczowego pokoju wynosiły odpowiednio $(3000 - x)$, $(3000 - y)$ i $(3000 - z)$ złotych (dopuszczamy „ujemne ceny”, tzn. dopłacanie lokatorowi za mieszkanie w danym pokoju). Zauważmy, że istotnie te ceny sumują się do całego czynszu, czyli 3000 złotych. W ten sposób kolorujemy wszystkie wierzchołki. Zakładamy przy tym, że nikt nie weźmie pokoju za 3000 złotych (nikt nie chce płacić sam czynszu za całe mieszkanie). Łatwo sprawdzić, że wtedy to kolorowanie spełnia warunki lematu Spernera. Istnieje zatem mały różnokolorowy trójkąt, a więc trzy bardzo podobne podziały czynszu, w których każdy woli inny pokój. Podobnie jak w poprzednim zadaniu, możemy wziąć np. średnią z tych trzech podziałów czynszu i rozdzielić pokoje zgodnie z preferencjami. Mogliśmy wziąć dowolnie drobną triangulację (podzielić na dowolnie dużo małych trójkątów), więc różnice w zadowoleniu lokatorów będą minimalne. \square

Problem 3. *Aldona i Bogumił grają w Hex. Jest to gra polegająca na naprzemiennym oznaczaniu sześciokątnych pól na „kwadratowej” (tyle samo sześciokątów w pionie i w poziomie) planszy. Celem Aldony jest utworzenie ścieżki od lewej do prawej krawędzi, a celem Bogumiła – od górnej do dolnej (np. na rys. 7 wygrywa Bogumił). Aldona zaczyna. Czy może zapewnić sobie zwycięstwo?*



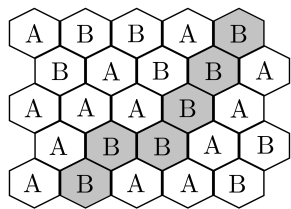
Rys. 7

Rozwiązanie. Udowodnimy, że istnieje strategia wygrywająca dla Aldony. Najpierw zauważmy, że na mocy twierdzenia Zermelo zachodzi dokładnie jedno z poniższych:

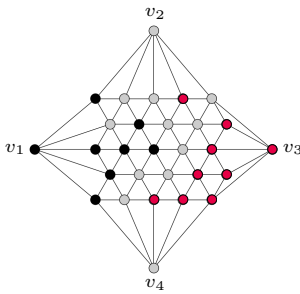
1. Aldona ma strategię wygrywającą.
2. Bogumił ma strategię wygrywającą.
3. Oboje mają strategię remisującą.

Udowodnimy, że niemożliwy jest przypadek 2. Załóżmy, że Bogumił miałby strategię wygrywającą. Wtedy Aldona mogłaby zacząć grę, oznaczając dowolne pole (co nie może jej w żaden sposób zaszkodzić) i następnie podążać za strategią Bogumiła. Wygrałaby wtedy Aldona, i otrzymujemy sprzeczność (ten pomysł nazywa się „złodziejem strategii”, możecie o tym poczytać więcej w Δ_{17}^5).

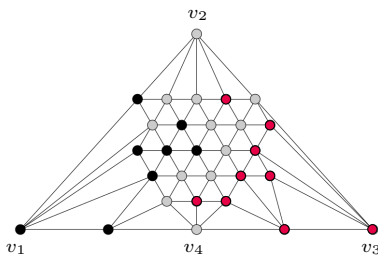
Wystarczy zatem udowodnić, że niemożliwy jest remis. Załóżmy, że każde pole na planszy należy do kogoś, ale nikt nie wygrał (rys. 8). Poprzez wierzchołki będziemy rozumieli pola planszy oraz cztery sztucznie dodane wierzchołki reprezentujące każdą stronę planszy. Oznaczmy „sztuczne” wierzchołki przez v_1, v_2, v_3, v_4 . Powiemy, że v_1 i v_3 należą do Aldony, a v_2 i v_4 do Bogumiła.



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

Pokolorujemy każdy wierzchołek v według następującej zasady (rys. 9):

- na czarno, jeśli v należy do Aldony i istnieje ścieżka od v_1 do v należąca całkowicie do Aldony,
- na szaro, jeśli v należy do Bogumiła i istnieje ścieżka od v_2 do v należąca całkowicie do Bogumiła,
- na pomarańczowo w przeciwnym wypadku.

Wydawałoby się, że nie da się tu użyć lematu Spernera (w końcu graf na rysunku 9 w żadnym stopniu nie przypomina trójkąta). Nie jest to jednak problem, bo możemy go zdeformować, aby uzyskać trójkąt, co widać na rysunku 10. Sprawdźmy, czy powstała triangulacja spełnia warunki lematu Spernera:

- v_1 , v_2 i v_3 są wierzchołkami powstałego dużego trójkąta i są odpowiednio czarne, szare i pomarańczowe (gdyby v_3 było czarne, to istniałaby ścieżka od v_1 do v_3 należąca do Aldony – sprzeczność z założeniem o remisie).
- Na lewym boku dużego trójkąta znajdują się v_1 i v_2 , które są odpowiednio czarne i szare. Jest też lewy górny róg planszy. Jest on połączony z v_1 i v_2 , zatem jeśli należy do Aldony, to jest czarny, a jeśli należy do Bogumiła, to jest szary. Nie ma więc koloru pomarańczowego.
- Na prawym boku dużego trójkąta znajdują się v_2 i v_3 , które są odpowiednio szare i pomarańczowe. Jest też prawy górny róg planszy. Gdyby był czarny, to istniałaby ścieżka od v_1 do v_3 w całości należąca do Aldony – sprzeczność. Nie ma więc koloru czarnego.
- Na dolnym boku dużego trójkąta znajdują się: v_1 , v_3 , v_4 oraz rogi planszy. Wierzchołek v_1 jest czarny, a v_3 pomarańczowy. Gdyby v_4 lub któryś z rogów planszy był szary, to istniałaby ścieżka od v_2 do dolnej krawędzi planszy należąca tylko do Bogumiła – sprzeczność. Nie ma więc koloru szarego.

Widzimy zatem, że ta triangulacja spełnia warunki lematu i istnieje różnokolorowy mały trójkąt. Oznaczmy przez a, b, c jego wierzchołki, które są odpowiednio czarne, szare i pomarańczowe. Jeśli c należy do Aldony, to ponieważ istnieje ścieżka od v_1 do a należąca do Aldony, to istnieje także ścieżka od v_1 do c należąca do Aldony. Zatem c powinno być czarne – sprzeczność. Podobnie sprzeczność uzyskujemy, gdy c należy do Bogumiła, co kończy dowód. \square

Pół szklanki mocnego kodu

Ghost speaker

Piotr KRZYŻANOWSKI*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Jest wiele sposobów zrobienia wrażenia na ludziach, ale jednym z najbardziej popularnych jest wciąż

wyłoszenie przemówienia.

W życiu każdego mówcy może przyjść taki moment, gdy wcześniej przygotowaną płomienną przemowę chciałoby się przedłużyć, by jeszcze wyżej wznieść się na emocjach entuzjastycznego tłumu, doskonale rezonującego z głosem z megafonów... Łatwo tu jednak wpaść w pułapkę, bo przecież nie można zbyt długo mówić samych mądrych, samych porywających, samych głęboko przemyślanych zdań. Trzeba więc mieć w zanadrzu pewną „watę słowną”, którą w razie konieczności można by *nadmuchać* długość przemówienia.

Oczywiście problem nie jest nowy – i jest od dawna rozwiązany, zresztą na kilka sposobów. Na przykład na stronie textinflator.com możemy skorzystać z automatu, który *rozwadnia* podany tekst – nawet dwukrotnie zwiększając jego objętość! Niestety w trakcie wydarzenia na żywo nie da się z niego skorzystać, bo przecież to, co mieliśmy przeczytać z kartki, już przeczytaliśmy...

W takim przypadku lepiej sprawdzi się rozwiązanie polegające na wykorzystaniu *mowy-trawy*, czyli spreparowaniu tekstu składającego się z okrągłych zdań, zawierających pewne rytualne, oklepne teksty – przez co przemowa będzie udawać, że niesie w sobie jakąś sensowną treść. Między innymi w latach osiemdziesiątych XX wieku tygodnik „Polityka” opublikował żartobliwą tabelkę – *uniwersalną ściągaczkę zebraniową* – wystarczającą na „czterdziestogodzinne przemówienie”, tworzone na żywo przez przypadkowe złączenie fraz-wytrychów ówczesnej nowomowy. Przytaczamy ją w całości poniżej, łącznie z instrukcją użycia: *Dowolną frazę z kolumny 1. należy kolejno połączyć z dowolnymi frazami z kolumn 2., 3. i 4.*

Jak działa Textinflator? Na przykład wstawia do tekstu niewiele znaczące ozdobniki, zastępuje krótkie wyrazy długimi itp.