

Raz, dwa, trzy, wychodź ty!

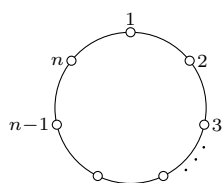
Piotr ZARZYCKI*

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Gdański

Dawno temu... w czasach bez Internetu, bez gier komputerowych i smartfonów dzieci bawiły się w chowanego. Na początku zabawy trzeba było oczywiście wyznaczyć osobę, która będzie szukać. Uczestnicy ustawiali się w koło i ktoś odliczał: *Raz, dwa, trzy, wychodź ty*, i wówczas szósta osoba (odliczanka ma 6 sylab) wychodziła z kółka. Procedurę tę powtarzano aż do momentu, gdy w kółku pozostała jedna osoba – to był pierwszy szukający. Istnieje wiele wierszyków–odliczanek. Moją ulubioną jest odliczanka 15-sylabowa: *Mama daje jeść, tata daje pić, a ty sobie idź*.

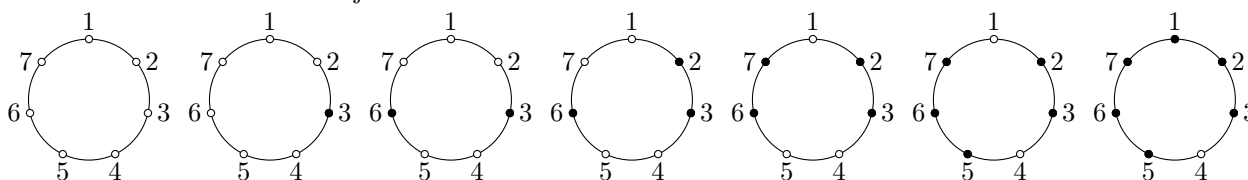
Historia powstańców otoczonych w jaskini została opisana w dziele *Wojna żydowska* przez historyka rzymsko-żydowskiego Józefa Flawiusza (37–94?).

Bardzo dawno temu... dokładniej prawie 2 tysiące lat temu, Flawiusz wraz z grupą powstańców został otoczony w jaskini. Powstańcy zdecydowali, że nie poddadzą się i nie dadzą się pojmać żywcem. Postanowili więc losować: „w jakiej kolejności mamy jeden drugiego zabijać. Pierwszy, na którego padnie, niech zginie z ręki następującego po nim” (cytat z dzieła Flawiusza). W opisie nie było szczegółów na temat losowania i wątpię, czy historyk myślał o jakimkolwiek matematycznym aspekcie tego zagadnienia. Jako pierwszy matematyczną postać temu zdarzeniu nadał francuski matematyk Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1581–1638). Według niego powstańcy po ustawieniu się w okrąg mieli eliminować co trzeciego spośród siebie. Nie wiadomo, ilu było powstańców, niektóre źródła podają, że czterdziestu (wraz z Flawiuszem), inne, że czterdziestu jeden. Można też spotkać wersję z co siódmym eliminowanym uczestnikiem „śmiertelnej odliczanki”.



Rys. 1

Załóżmy, że liczby od 1 do n ustawiono na okręgu (patrz rys. 1). Posuwając się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, skreślamy co k -tą liczbę. Oczywiście w kolejnym okrążeniu nie uwzględniamy w odliczance skreślonych wcześniej liczb. Zajmiemy się problemem szukania ostatniej nieskreślonej liczby spośród n , gdy wykreślamy co k -tą. Oznaczmy ją przez $J(n, k)$ i nazwijmy **liczbą szczęśliwą**. Zagadnienie to nosi nazwę **problemu Flawiusza** (*Josephus Problem*). Spójrzmy na kolejne skreślenia dla $n = 7$ oraz $k = 3$:



Wynika stąd, że $J(7, 3) = 4$.

Jak obliczać $J(n, k)$? Oczywiście wartości można wyznaczać „ręcznie”, ale dla większych n jest to niewygodne. Napiszmy program do obliczania liczb szczęśliwych. Poniżej prezentujemy procedurę napisaną w programie MATHEMATICA (ilustrujemy ją przykładem dla $n = 7$ oraz $k = 3$).

Krok 1. Przenieść $k - 1$ początkowych wyrazów listy $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ na jej koniec. Czyli z listy $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ otrzymujemy $\{3, 4, 5, 6, 7, 1, 2\}$.

```
f[lista_, k_] := Flatten[Append[Take[lista, {k, Length[lista]}],
    Take[lista, {1, k - 1}]]]
```

Krok 2. Wykreślić pierwszy element listy, tj. z $\{3, 4, 5, 6, 7, 1, 2\}$ otrzymujemy $\{4, 5, 6, 7, 1, 2\}$.

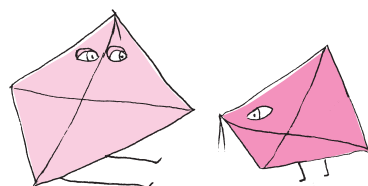
```
g[lista_, k_] := Drop[f[lista, k], 1]
```

Krok 3. Powtórzyć $k - 1$ razy kroki 1 i 2. Z listy $\{4, 5, 6, 7, 1, 2\}$ dostajemy $\{4\}$.

```
flawiusz[n_, k_] := Module[{lista=Range[n]},
    Do[lista=g[lista, k], {i, n - 1}]; Return[lista]
```

Wartości $J(n, 2)$. Spójrzmy na tabelkę, w której zamieszczono liczby szczęśliwe dla n w zakresie od 1 do 20, gdy skreślamy co drugą liczbę:

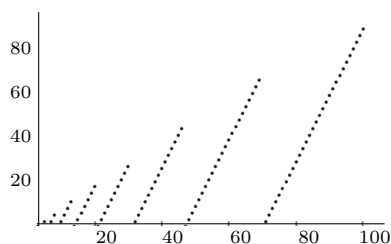
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$J(n, 2)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5	7	9



W dowodzie wzoru (*) korzysta się z dwóch zależności rekurencyjnych:

$$J(2n, 2) = 2J(n, 2) - 1,$$

$$J(2n + 1, 2) = 2J(n, 2) + 1.$$



Funkcje $\lfloor \cdot \rfloor$, $\lceil \cdot \rceil$, nazywane odpowiednio *podłoga* i *sufit*, zaokrąglają liczby rzeczywiste do liczb całkowitych odpowiednio w dół i w górę.

n	długość rozłącznych cykli w $P(n, 2)$
3	2,1
11	7,4
23	14,9
83	47,36
131	72,59

Prawidłowość jest ewidentna. Można nawet pokusić się o odgadnięcie wzoru jawnego:

$$(*) \quad J(n, 2) = 2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}) + 1.$$

Okazuje się, że jawny wzór na $J(n, k)$ jest znany jedynie dla $k = 2$.

$J(n, k)$ dla $k > 2$ – problem otwarty. Spójrzmy na poniższą tabelkę:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$J(n, 3)$	1	2	2	1	4	1	4	7	1	4	7	10	13	2	5	8	11	14	17	20

Wartości $J(n, 3)$ są przedstawione obok dla $n = 1, 2, \dots, 100$. Można dostrzec następującą prawidłowość: od $n = 4$ występują „bloki” coraz dłuższych ciągów arytmetycznych o przyroście 3.

Pójdźmy jeszcze tropem wyznaczonym przez Andrew M. Odlyzko oraz Herberta S. Wilfa, którzy w pracy [1] z 1991 roku zaproponowali następujący wzór:

$$J(n, 3) = 3n + 1 - \left\lfloor K(3) \left(\frac{3}{2} \right)^{\left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \frac{2n+1}{K(3)} \right\rceil} \right\rfloor,$$

gdzie $K(3)$ jest stałą (obliczoną za pomocą dość skomplikowanej procedury), której wartość do 9-go miejsca po przecinku wynosi 1,622705028.

Jawny wzór, nieodwołujący się do żadnych innych procedur, dla $J(n, k)$, gdy $k > 2$ nie jest znany.

Inny trop, permutacje – i zaskakująca puenta. Pewne zastosowanie problemu Flawiusza można znaleźć w książce Israela N. Hersteina i Irvinga Kaplansky’ego *Matters Mathematical* [2]. Autorzy używają tak zwanych *permutacji Josephusa*. Wyjaśnimy to na przykładzie $J(8, 2)$: w ręcznym wykreślaniu eliminowane są kolejno 2, 4, 6, 8, 3, 7, 5. Na końcu ciągu dopiszmy nieskreślone 1. Kolejność skreślania można zapisać w postaci permutacji

$$P(8, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 3 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Każdą permutację możemy przedstawić w postaci rozłącznych cykli, w naszym przypadku: $P(8, 2) = (1248)(3675)$. Analogicznie można postąpić dla dowolnego n . Herstein i Kaplansky odkryli, że jeśli n oraz $2n + 1$ są liczbami pierwszymi oraz n jest postaci $4k + 3$, to permutacja $P(n, 2)$ jest iloczynem dwóch rozłącznych cykli. Długości tych cykli dla wybranych n umieszczono w tabelce na marginesie.

Zanim opiszemy kolejne odkrycie Hersteina i Kaplansky’ego, przedstawimy kilka informacji dotyczących ciał liczbowych. Czytelnicy doskonale znają liczby wymierne oraz ich bogatą strukturę algebraiczną – z dodawaniem i odejmowaniem, mnożeniem i dzieleniem zbior \mathbb{Q} tworzy *ciało*. A co się stanie, gdy rozszerzymy zbiór \mathbb{Q} o jakiś element niebędący liczbą wymierną? Powinniśmy przy tym zadbać, aby algebraicznie nowy zbiór nic nie „stracił”, to znaczy pozostał ciałem. Przykład takiego rozszerzenia podał Gauss, jest to *ciało Gaussa*: $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Z kolei o *pierścieniu Gaussa* $\mathbb{Z}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ można powiedzieć, że jest tym dla ciała $\mathbb{Q}(i)$, czym dla \mathbb{Q} są liczby całkowite \mathbb{Z} . Kluczowa własność zbioru liczb całkowitych to rozkładalność na czynniki pierwsze i jednoznaczność tego rozkładu. Okazuje się, że w pierścieniu Gaussa liczby także są jednoznacznie rozkładalne na czynniki pierwsze.

Pojęciem ogólniejszym od ciała Gaussa są *ciała liczbowe* postaci $\mathbb{Q}(\theta)$, gdzie θ jest liczbą algebraiczną (czyli pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych). Ciało Gaussa jest ciałem liczbowym, $i = \sqrt{-1}$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^2 + 1$. Dla ciał liczbowych rozpatruje się pierścienie „liczb całkowitych” tych ciał i bada własność jednoznaczności rozkładu tych pierścieni. Ta własność ma fundamentalne znaczenie przy rozwiązywaniu *równań diofantycznych*, na przykład równania Fermata $x^n + y^n = z^n$. Batalia o dowód, że równanie Fermata nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych dla każdego $n \geq 3$, zakończyła się dla wielu wybitnych matematyków klęską. Przyjmowali oni bowiem błędne założenie, że pewne pierścienie mają własność jednoznaczności rozkładu.

Liczba bezkwadratowa to taka liczba całkowita, która nie jest podzielna przez żaden kwadrat liczby całkowitej z wyjątkiem 1. Na przykład 10 jest liczbą bezkwadratową, ale 18 nie jest, bo 18 jest podzielne przez $9 = 3^2$.

Liczba klas dla ciał postaci $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ to pojęcie związane z funkcjami postaci $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Bierzemy zbiór wszystkich takich funkcji (często używa się nazwy *forma kwadratowa* dwóch zmiennych) o ustalonym wyróżniku $b^2 - 4ac$ i wprowadzamy pewną relację równoważności w tym zbiorze. Relacja ta dzieli rozpatrywany zbiór na rozłączne klasy abstrakcji. Klas tych jest zawsze skończenie wiele, a ich liczbę nazywamy liczbą klas ciała liczbowego.

Autorowi tekstu nie udało się niestety znaleźć informacji, czy odkrycie Hersteina i Kaplansky'ego zostało w pełnej ogólności udowodnione i opublikowane.

- [1] A.M. Odlyzko, H.S. Wilf *Functional iteration and the Josephus problem*, Glasgow Mathematical Journal, v. 33 (1991), 235–240.
 [2] I.N. Herstein, I. Kaplansky *Matters Mathematical*, American Mathematical Society (1978).
 [3] L.R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik *Matematyka konkretna*, PWN (2019).



Zadania

Jeśli θ jest pierwiastkiem wielomianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych, to możemy zakładać, że $\theta = \sqrt{d}$, gdzie d jest *bezkwadratową* liczbą całkowitą. Wówczas pierścień liczb całkowitych ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ to po prostu $\mathbb{Z}(\sqrt{d})$, wtedy gdy d jest postaci $4k + 2$ lub $4k + 3$. Natomiast dla liczb postaci $4k + 1$ ten pierścień to $\mathbb{Z}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{d})$.

Przykładem pierścienia, w którym nie ma jednoznaczności rozkładu, jest $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$. W pierścieniu tym mamy na przykład $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$. Aby badać problem jednoznaczności rozkładu w pierścieniach typu $\mathbb{Z}(\sqrt{d})$ lub $\mathbb{Z}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{d})$, wprowadzono pojęcie *liczby klas*. Liczba klas ciała służy do rozpoznawania, czy wspomniane pierścienie mają własność jednoznaczności rozkładu, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczba klas jest równa 1. Udowodniono, że istnieje dokładnie dziewięć pierścieni ciał liczbowych $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, gdzie d jest bezkwadratową ujemną liczbą całkowitą, mających własność jednoznaczności rozkładu. Te liczby to: $-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$.

Powróćmy teraz do permutacji Josephusa. Przypomnijmy, że rozważamy takie n , że n oraz $2n + 1$ są liczbami pierwszymi oraz n jest postaci $4k + 3$. Okazało się, że długości cykli można wykorzystać do obliczania liczby klas niektórych ciał liczbowych postaci $\mathbb{Q}(\sqrt{-(2n + 1)})$. W każdym takim ciele pierścień liczb całkowitych to $\mathbb{Z}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-(2n + 1)})$. I tutaj niespodzianka: liczbę klas ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{-(2n + 1)})$ można wyznaczyć, korzystając z długości cykli zamieszczonych w tabeli 1. Liczba klas ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ (czyli $n = 3$) wynosi $2 - 1 = 1$, liczba klas ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ ($n = 11$) wynosi $7 - 4 = 3$. Dla ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{-47})$ ($n = 23$) mamy liczbę klas $14 - 9 = 5$ i tak dalej.

Przedstawiliśmy zadanie, problem Flawiusza, które ma już ponad 400 lat (de Méziriac opublikował je w książce wydanej w 1612 roku), ale wciąż wzbudza spore zainteresowanie. Mnóstwo informacji na ten temat można znaleźć w *Matematyce konkretnej* [3]. Zachęcamy do zapoznania się z tą piękną książką, zawierającą mnóstwo interesujących faktów dotyczących rozpatrywanych tu zagadnień.

Przygotował Łukasz RAJKOWSKI

M 1624. Znaleźć największą wartość sumy $\sum_{i < j \leq n} |x_i - x_j|$, gdzie $x_i \in [0, 1]$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Rozwiązanie na str. 17

M 1625. Znaleźć największą liczbę parami różnych punktów kratowych (x_i, y_i) , $x_i, y_i \in \{1, 2, \dots, n\}$, spośród których nie można wybrać czterech wierzchołków równoległoboku.

Rozwiązanie na str. 13

M 1626. Znaleźć największe pole trójkąta o bokach PA, PB, PC , gdzie P jest punktem wewnątrz trójkąta równobocznego ABC o boku 1.

Rozwiązanie na str. 6

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 991. Podczas skurczu serce dorosłego człowieka wyrzuca $V = 70$ ml krwi pod ciśnieniem $p = 1,6 \cdot 10^4$ Pa (120 mmHg). Skurcz serca następuje ze średnią częstością $n = 70/\text{min}$. (Wszystkie dane dla człowieka spoczywającego). Oszacuj średnią moc serca L .

Rozwiązanie na str. 7

F 992. Kiedy już podróże kosmiczne staną się powszechne, policja na pewno będzie chciała fotografować kosmonautów łamiących „przepisy ruchu kosmicznego”. Oszacuj, z jakiej odległości L policjant będzie jeszcze mógł odczytać numer rejestracyjny pojazdu, jeśli wykona zdjęcie w świetle widzialnym za pomocą teleskopu Hubble'a o średnicy zwierciadła $D = 2,4$ m, a tablice rejestracyjne będą miały taką formę jak dzisiaj.

Rozwiązanie na str. 6