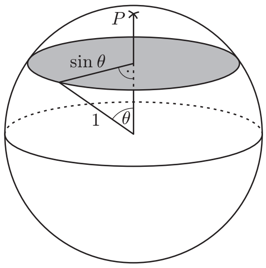
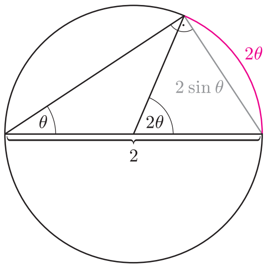


Rys. 2



Rys. 3

okazuje się zbiorem pustym, nie ma więc co mówić o jego długości. Natomiast okrąg o promieniu $\frac{\pi}{2}R$ jest okręgiem wielkim, toteż ma długość $2\pi R$. Widzimy w szczególności, że zdefiniowane właśnie okręgi na sferze są w przestrzeni jednocześnie okręgami w zwyczajnym sensie – dla uniknięcia nieporozumień w drugim przypadku będziemy mówić o okręgu *euklidesowym*, z *euklidesowym* środkiem i promieniem.

Dla ustalenia uwagi za punkt P przyjmijmy biegun północny sfery i ustalmy promień sfery równy 1. Wówczas okrąg $S(P,\theta)$ jest równoleżnikiem odpowiadającym szerokości geograficznej $\frac{\pi}{2}-\theta$ (kąty mierzymy tu w radianach). Jak pokazuje rysunek 2, ma on euklidesowy promień równy $\sin\theta$. W ten sposób otrzymujemy wzór na długość okręgu

$$|S(P,\theta)| = 2\pi\sin\theta.$$

Wiemy, że na płaszczyźnie byłoby to $2\pi\theta$. Porównanie długości łuku i cięciwy na rysunku 3 pokazuje, że $\sin\theta < \theta$, a więc okręgi na sferze są krótsze od ich odpowiedników na płaszczyźnie. Gdyby pewne otoczenie punktu P na sferze było izometryczne z fragmentem płaszczyzny, to te dwa wzory musiałyby się pokrywać, przynajmniej dla odpowiednio małych wartości θ.

W ten sposób możemy z ulgą skonstatować, że Ziemia nie jest płaska.

Kombinatoryka ekstremalna i przesuwanie zbiorów

*Damian ORLEF**

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Najogólniej mówiąc, kombinatoryka ekstremalna zajmuje się pytaniami o to, jaki jest rozmiar największego (lub najmniejszego) możliwego zbioru obiektów danego typu, spełniającego pewien zadany warunek i jak takie ekstremalne przypadki wyglądają. Wiele z nich dotyczy rodzin zbiorów, jak np.

Pytanie 1. Jaka jest największa rodzina podzbiorów zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$, której każde dwa elementy mają niepuste przecięcie?

Rodzinę spełniającą ten warunek nazywać będziemy *przecinającą się*. Oznaczmy dla wygody $[n] := \{1,2,\ldots,n\}$. Nietrudno wskazać przykład sporej rodziny przecinającej się: dla dowolnego $a \in [n]$ spełnia ten warunek rodzina wszystkich podzbiorów $[n]$, które zawierają a, składająca się z 2^{n-1} zbiorów. Więcej już nie uzyskamy, o czym przekonamy się, ustawiając wszystkie podzbiory zbioru $[n]$ w 2^{n-1} par postaci $\{A, [n]\setminus A\}$. Dowolna rodzina przecinającą się zawiera co najwyżej jeden zbiór z każdej pary, więc jej liczność nie przekracza 2^{n-1}, co chcieliśmy wykazać.

Wybór podzbioru $[n]$ zawierającego a jest równoważny wyborowi pozostałych elementów, czyli dowolnego podzbioru zbioru $[n]\setminus\{a\}$.

Nie odpowiedzieliśmy jednak na pytanie o to, jak wyglądają wszystkie przecinające się rodziny podzbiorów $[n]$, które osiągają 2^{n-1} elementów. Te przedstawione nie są jedyne.

Po tej udanej rozgrzewce rozważmy podobny problem dla rodzin r-*jednorodnych*, tzn. składających się tylko ze zbiorów ustalonej mocy $r \in [n]$.

Pytanie 2. Jaka jest największa r-jednorodna, przecinającą się rodzina podzbiorów zbioru $[n]$?

Taką rodzinę będziemy nazywać w skrócie (r,n)-*rodziną*. Dla $r > n/2$ widać, że nawet rodzina wszystkich r-elementowych podzbiorów zbioru $[n]$ jest (r,n)-rodziną, więc w dalszym ciągu zakładamy, że $1 \leqslant r \leqslant n/2$.

Modyfikując wcześniejszy przykład, możemy wskazać (r,n)-rodzinę wszystkich r-elementowych podzbiorów $[n]$ zawierających pewną ustaloną liczbę $a \in [n]$; rodzina ta liczyć będzie $\binom{n-1}{r-1}$ elementów. Podobnie jak wcześniej, więcej się nie da, ale dowód maksymalności jest teraz bardziej wymagający. My skorzystamy z ciekawej i bardzo użytecznej techniki *przesuwania* (ang. *shifting*) rodziny zbiorów, która ograniczy nasz problem do dość wygodnych rodzin.

Wybieramy $(r-1)$ elementów zbioru $A\setminus\{a\}$ spośród $(n-1)$ elementów zbioru $[n]\setminus\{a\}$.

O co chodzi w przesuwaniu? Zakładamy, że dana jest pewna rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów $[n]$. Dla dowolnej pary liczb $1 \leqslant i < j \leqslant n$ określamy operację s_{ij} na zbiorach $A \in \mathcal{F}$ jako „podmianę” liczby j na i, o ile jest to możliwe i o ile prowadzi do powstania zbioru spoza $\mathcal{F}$. Bardziej precyzyjnie

$$s_{ij}(A) = \begin{cases} (A\setminus\{j\})\cup\{i\}, & \text{jeśli } j\in A,\ i\notin A \text{ oraz } (A\setminus\{j\})\cup\{i\}\notin\mathcal{F},\\ A, & \text{w przeciwnym przypadku.}\end{cases}$$

Widać, że definicja $s_{ij}(A)$ zależy nie tylko od A, ale też od rodziny $\mathcal{F}$, którą rozważamy, więc lepiej byłoby pisać $s_{ij}^{\mathcal{F}}(A)$ zamiast $s_{ij}(A)$, ale na szczęście i tak nie napotkamy na kłopoty w oznaczeniach.

Rozwiązanie zadania F 901.
Opierając się na analizie wymiarowej, możemy napisać, że dla sprężyn o jednakowym kształcie $k\,[\mathrm{N/m}] = Ca\,[\mathrm{m}] \cdot E\,[\mathrm{N/m^2}]$, gdzie C – stała bezwymiarowa, a – któryś z geometrycznych rozmiarów sprężyny, E – moduł Younga. Wyobraźmy sobie trzecią sprężynę o średnicy 9 mm i długości 3 cm wykonaną z drutu o średnicy 0,6 mm. Miałaby ona współczynnik sprężystości trzy razy większy od sprężyny pierwszej, to znaczy $3 \cdot 14\,\mathrm{N/m} = 42\,\mathrm{N/m}$. Równocześnie współczynniki sprężystości trzeciej i drugiej sprężyny pozostają w stosunku 3/7. Stąd otrzymujemy, że współczynnik sprężystości drugiej sprężyny wynosi $18\,\mathrm{N/m}$.

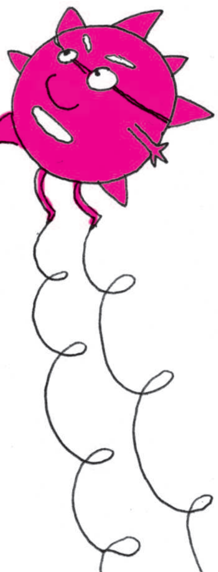
(Rozważając zależność współczynnika sprężystości od długości sprężyny, zauważmy, że, na przykład, szeregowe połączenie n jednakowych sprężyn, każda o współczynniku sprężystości k, daje sprężynę o współczynniku sprężystości k/n.)

Stosując ją, zastępujemy pewne wystąpienia liczby j w zbiorach rodziny $\mathcal{F}$ wystąpieniami mniejszej liczby i, nie zmieniając mocy modyfikowanych zbiorów. Sprawdzając kilka prostych przypadków, można też zauważyć, że operacja s_{ij} jest różnowartościowa na $\mathcal{F}$, a zatem wynik jej zastosowania do wszystkich zbiorów rodziny, tzn. rodzina $s_{ij}(\mathcal{F}) := \{s_{ij}(A) : A \in \mathcal{F}\}$, liczy sobie tyle samo elementów co $\mathcal{F}$. Nazwijmy *wagą* zbioru $A \subseteq [n]$ sumę jego elementów, zaś *wagą* rodziny $\mathcal{F}$ – sumę wag zbiorów należących do $\mathcal{F}$. Zauważmy, że waga $s_{ij}(\mathcal{F})$ jest nie większa od wagi $\mathcal{F}$, a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $s_{ij}(A) = A$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$. Najciekawsze jednak jest to, że jeśli $\mathcal{F}$ jest rodziną przecinającą się, to jest nią również $s_{ij}(\mathcal{F})$. Ponieważ jednak niniejszy artykuł i tak jest bogato udekorowany matematycznymi formułami, techniczny (acz nietrudny) dowód tego faktu pozostawiam Czytelnikowi Dociekliwemu jako ćwiczenie.

Potrzebne nam będzie jeszcze jedno pojęcie – rodzinę $\mathcal{F}$ nazwiemy *przesuniętą*, jeżeli dla każdych $1 \leqslant i < j \leqslant n$ zachodzi $s_{ij}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, co oznacza tak naprawdę, że $s_{ij}(A) = A$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$, bo rodziny $\mathcal{F}$ i $s_{ij}(\mathcal{F})$ mają taką samą wagę. Równoważnie, rodzina $\mathcal{F}$ jest przesunięta, jeśli dla każdych liczb $1 \leqslant i < j \leqslant n$ oraz każdego zbioru $A \in \mathcal{F}$, z warunków $j \in A$, $i \notin A$ wynika, że $(A \setminus \{j\}) \cup \{i\} \in \mathcal{F}$. W zbiorach z przesuniętej rodziny $\mathcal{F}$ można podmieniać większe liczby na mniejsze, otrzymując dalej zbiory z $\mathcal{F}$.

Rozważmy teraz dowolną rodzinę $\mathcal{F}$ i jeśli istnieją $1 \leqslant i < j \leqslant n$ takie, że $s_{ij}(\mathcal{F}) \neq \mathcal{F}$, to zastąpmy $\mathcal{F}$ przez $s_{ij}(\mathcal{F})$ i powtarzajmy tę procedurę, dopóki jest to możliwe. Kiedyś musi się ona zakończyć z uwagi na zmniejszającą się wagę rozważanej rodziny, a zatem z każdej rodziny $\mathcal{F}$ możemy, stosując skończenie wiele operacji postaci s_{ij}, otrzymać rodzinę przesuniętą $\mathcal{F}'$.

Możemy teraz uzasadnić odpowiedź na pytanie 2. Wykażemy przez indukcję względem n, że jeśli $1 \leqslant r \leqslant n/2$ oraz $\mathcal{F}$ jest (r,n)-rodziną, to $|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n-1}{r-1}$.



Bazę indukcji stanowi przypadek $n = 2$, w którym sprawa jest oczywista. Przejdźmy do dowodu kroku indukcyjnego: niech $1 \leqslant r \leqslant n/2$ oraz $\mathcal{F}$ będzie (r,n)-rodziną. Jeśli $r = 1$, to łatwo zobaczyć, że $|\mathcal{F}| \leqslant 1 = \binom{n-1}{r-1}$. Jeśli zaś $r = n/2$, to możemy powtórzyć rozumowanie użyte przy okazji pytania 1 i podzielić r-elementowe podzbiory $[n]$ na pary postaci $\{A, [n] \setminus A\}$. Do każdej z nich należy co najwyżej jeden element rodziny $\mathcal{F}$, więc $|\mathcal{F}| \leqslant \frac{1}{2}\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1}$.

Pozostaje przypadek $1 < r < n/2$. Rodzinę $\mathcal{F}$ możemy operacjami s_{ij} przekształcić do rodziny $\mathcal{F}'$, która jest przesunięta, a także, z uwagi na własności zachowywane przez s_{ij}, jest (r,n)-rodziną i liczy tyle samo elementów, co $\mathcal{F}$. Sprowadziliśmy zatem problem do rodzin przesuniętych. Próbując zredukować problem do podzbiorów $[n-1]$, rozważmy rodziny $\mathcal{F}'_0 := \{A \in \mathcal{F}' : n \notin A\}$ oraz $\mathcal{F}'_1 := \{A \setminus \{n\} : A \in \mathcal{F}', n \in A\}$.

$\mathcal{F}'_0$ jest z założenia $(r, n-1)$-rodziną oraz $1 \leqslant r \leqslant (n-1)/2$, więc na mocy założenia indukcyjnego, $|\mathcal{F}'_0| \leqslant \binom{n-2}{r-1}$.

Z kolei $\mathcal{F}'_1$ jest $(r-1)$-jednorodną rodziną podzbiorów $[n-1]$, a także $1 \leqslant (r-1) \leqslant (n-1)/2$. Sprawdźmy, że jest też rodziną przecinającą się, aby móc skorzystać z założenia indukcyjnego. Przypuśćmy nie wprost, że pewne $A, B \in \mathcal{F}'_1$ są rozłączne. Ponieważ $|A \cup B| = |A| + |B| = 2r - 2 \leqslant n - 2$, więc istnieje $k \in [n-1] \setminus (A \cup B)$. Do przesuniętej rodziny $\mathcal{F}'$ należą zbiory $A_1 := A \cup \{n\}$, $B_1 := B \cup \{n\}$, więc należy również do niej $(A_1 \setminus \{n\}) \cup \{k\} = A \cup \{k\}$. Widać teraz, że $A \cup \{k\}$ i $B \cup \{n\}$ są rozłącznymi elementami przecinającej się rodziny $\mathcal{F}'$, czyli mamy sprzeczność. Z założenia indukcyjnego dostajemy więc $|\mathcal{F}'_1| \leqslant \binom{n-2}{r-2}$.

Podsumowując, $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}'| = |\mathcal{F}'_0| + |\mathcal{F}'_1| \leqslant \binom{n-2}{r-1} + \binom{n-2}{r-2} = \binom{n-1}{r-1}$, co kończy dowód kroku indukcyjnego i rozwiązanie problemu.

Jeśli $r < n/2$, to zdefiniowane wcześniej rodziny są jedynymi (r,n)-rodzinami o $\binom{n-1}{r-1}$ elementach. Jeśli $r = n/2$ i $r > 1$, to możliwości jest już więcej.

Dość naturalny pomysł na krok indukcyjny mógł zadziałać dopiero po przejściu do rodziny przesuniętej. Otrzymany rezultat znany jest jako twierdzenie Erdősa–Ko–Rado, a przyjrzeliśmy się właśnie jego pierwszemu dowodowi. Na tym się jednak kariera techniki przesuwania w kombinatoryce nie skończyła. Udało się dzięki niej rozwiązać wiele problemów i wciąż jest ona z powodzeniem stosowana.